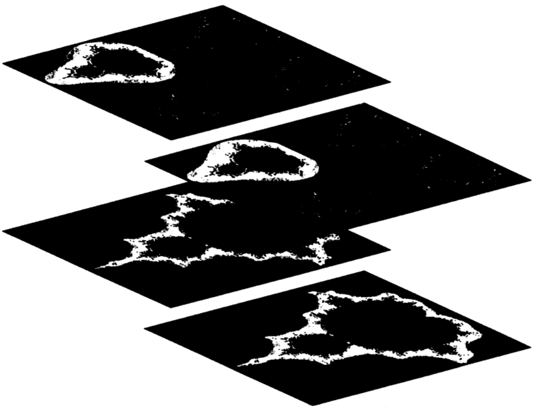
ウェーブレット解析

誕生・発展・応用

芦野隆一
山本鎮男 共著



共立出版

はじめに

本書は理工学部の学生や大学院生およびエンジニアを対象にしたウェーブレット解析の入門書である．

ウェーブレット（wavelet），何と不思議な響きをもつ言葉であろう．“wave” は波であり，“let” は接尾語で小さいことを意味したり，身につける飾りを意味する．現在，科学や工学のいろいろな分野で注目を集めているウェーブレットとは，長く続かないひとつの波をうまく選び，形を変えずに拡大縮小したり平行移動したりして得られる波の集まりのことである．そんな波がいったいなぜ面白いのか，あるいは何の役にたつのか，そしてどのように研究されているのかといった疑問に答えることが本書の目的である．

ウェーブレット理論は 1980 年代初頭から始まったとされているが，そのもとになる概念や方法は数学，物理，信号理論，画像処理などのいろいろな分野で既に知られていた．特に信号理論や画像処理などの工学の分野の人にとってはウェーブレット理論でいったい何が新しいのかわからないといった感想が聞けるほど身近な手法だったのである．ウェーブレット理論が広まるにつれてわかったことは，自分達の分野だけで研究されていると思っていたことが他の多くの分野でも同じように研究されていたということであった．これは大きな驚きであり，これらの多くの分野でなされてきたことを統一して説明する共通の概念をつくり，他の多くの分野の研究を理解し，そして新しい結果を産み出そうという目的で，非常に多くの共同研究が行われている．このことは当然それぞれの分野にフィードバックされ，深い影響を与えているのである．また，ウェーブレットの研究はコンピュータサイエンスと密接に行われてきたので，インターネットを使って本格的に情報交換が行われていることも特筆に値する．

我々著者も，ひとりは応用数学ひとりは工学（機械，建築）を専門とし，それぞれの分野で研究してきたのであるが，ウェーブレットを研究するにあたり，他分野の人達と共同で研究する必要性を感じ，互いに活発に議論するようになった．もちろん数学の目的は主として理論そのものであり，工学の目的は主として理論を応用して現実の問題を解決することにあるので，互いの立場や意見が異なることはしばしばあるが，

数学は応用上何が求められているかを知る必要があり，工学は応用するための数学的道具を必要としているのである．ウェーブレットの理解には他の分野のことを知ることが必要不可欠なのである．我々はこのことを知っていただきたいので，この本を共同で執筆することにした．

本書の大きな特徴はウェーブレット解析を理解するためにインターネット編，数学的基礎編，そして工学的応用編という 3 つのアプローチを用意したことにある．どのアプローチからでもウェーブレット解析を理解できるが，それはウェーブレット解析のひとつの側面を理解したにすぎない．これらのアプローチが三位一体となって初めてウェーブレット解析を一望することができよう．

第 I 部インターネット編は芦野が担当し，インターネットを使ってウェーブレットの情報交換がどのように行われているかを知ってもらう目的で書かれている．WWW を使って紹介されているいくつかのホームページを見るだけで，ウェーブレットが何に使われているか直観的に理解することができよう．

第 II 部数学的基礎編は芦野が担当し，主として 1 変数のウェーブレット直交基底の基礎理論についてフーリエ解析を使って説明している．ウェーブレットの歴史や一般化されたシャノンの標本定理からウェーブレット直交基底がどのようにして導けるかを述べていること，また信号理論の必要知識を準備し，応用数学を視野に入れていくつかのアルゴリズムや数値計算例を述べていることはこの数学的基礎編の特徴である．ざっと目を通すだけで，どのようにしてウェーブレットが誕生したか，何が問題になっているのか，使われている数学は何かがわかるであろう．

第 III 部工学的応用編は山本が担当し，多くの例題を通じてウェーブレット解析と短時間フーリエ解析を両者比較検討し，得失を明らかにすることを試みた．ウェーブレット解析は，短時間フーリエ解析の不足を補うために登場したと言われているが，これを理解することが最大の使命と考えてこれに集中し，著者なりに得心のいった解説が得られたと思う．

これら 3 編について，詳しくは「本書の読み方」を参照していただきたい．

著者達は慎重にウェーブレット解析の基本的な事項から項目を選び，できる限り平易に解説したつもりであるが，それが独りよがりになっているところが多分にあることを危惧している．読者からの御注意，御意見をいただければ幸いである．本書によってウェーブレット解析には他の分野のことを知ることが必要であることが理解していただけるなら望外の喜びである．

本書は多くの方々の協力で書き上げることができた．全編を通じ著者達はオタワ大学の Rémi Vaillancourt 教授と京都工芸繊維大学の中岡 明教授に御批判と御助言をいただいた．また，京都工芸繊維大学の増田 新氏には，執筆当時カナダに滞在していた芦野と日本の京都にいる山本との間のインターネットでの仲立ちをお願いし，さらに原稿の TEX 化についてもお世話になった．ここに心から御礼申しあげる．お互いに地球の裏側に在っても，インターネットの活用により共同執筆での出版が可能であることを経験できたことは，著者達のもうひとつの成果である．

著者のひとり芦野は恩師京都大学名誉教授松浦重武先生にこの方面の研究に入る機縁と研究指導をしていただき，大阪大学の長瀬道弘教授とオタワ大学の Rémi Vaillancourt 教授には共同研究を通じて多くの御指導をいただいた．立命館大学の「現象の数理研究グループ」での議論やカナダ国立通信研究所の Mike Sablatash 博士からは大いに得るものがあった．インターネット編および数学的基礎編の原稿については茨城大学の畏友川下美潮氏に精読していただき，数々の改善を施すことができた．ここに深く感謝したい．芦野は産業技術短期大学の在外研修制度によりオタワ大学数学および統計学教室滞在中に本書を執筆した．産業技術短期大学およびオタワ大学数学および統計学教室の厚遇に心より感謝する．

著者のひとり山本は，ウェーブレットの研究に誘ってくれた京都工芸繊維大学中岡 明教授に心から感謝する．中岡教授が開いてくれたウェーブレットの講義に山本の研究室の職員，学生が参加して，その結果，機械学会，建築学会等の論文集に数編の論文を発表することができたのは大きな成果である．

今回，中岡教授の紹介により，その友人の芦野先生を知り，共著の本を書くことができたのは大きな喜びである．

執筆にあたっては，山本の研究室の曽根 彰助教授に資料の提供をいただいた．同じく研究室の俊英，増田 新君から，本書の内容について貴重な意見と着想を数多くいただいた．京都工芸繊維大学電子情報・生産科学専攻博士課程学生中野宏毅君には計算例の作成および結果の解釈について，いろいろ意見をいただいた．例題の計算および編集には山本の研究室院生の閤師昭彦君，領家英之君，研究生の吉川幸男君に協力していただいた．また，イラストについては，京都工芸繊維大学事務局の下村藤史郎君に描いていただいた．以上，ご協力いただいた方々に厚く御礼申し上げる．

最後に，本書を書く機会を与えてくださった産業技術短期大学の水野謹吾教授と共立出版の植山光陽氏および本書のできるまでに終始お世話になった共立出版の小山 透氏と LaTeX の出力で尽力された啓文堂の宮川憲欣氏に厚く御礼申し上げる．

1997 年 5 月

芦野 隆一
山本 鎭男

本書の読み方

本書はインターネット編，数学的基礎編，工学的応用編の 3 部構成になっている．各編とも独立して読めるように工夫してある．各分野によって表現や記号法が違っているのが現状であるため，各編での表現や記号法についてはあえて統一はしなかったし，いくつかの基本となる概念や手法が数学的基礎編と工学的応用編に表現を変えた形で登場するが重複を拒まなかった．各編の初めにはインターネット編を読むにあたって，数学的基礎編を読むにあたって，工学的応用編を読むにあたってという入門的な章を設けて各編の内容や必要な基礎知識等について説明している．したがって各編を独立して読む場合にはそれぞれの入門的な章にある読み方を参考にしてもらえば十分である．ここでは本書の有機的な読み方について述べよう．

- **ウェーブレット解析を直観的に理解したい場合**
  これにはインターネットを使うのが早道である．3.1 節ウェーブレットチュートリアル，3.2 節ウェーブレットダイジェスト，3.3 節ウェーブレットサイト，3.7 節ウェーブレットホームページアラカルトなどのいくつかのホームページに接続してみよう．また，4.1 節ウェーブレットの歴史を一読するのもよい．

- **ウェーブレット解析を理論的側面から理解したい場合**
  これには数学的基礎編が中心となる．特に 5 章ウェーブレット誕生，6 章多重解像度解析，7 章ウェーブレットの正則性は最も基本的な部分である．インターネット編からは 3.2 節ウェーブレットダイジェスト，3.3 節ウェーブレットサイト，3.4 節ウェーブレットプレプリント，3.5 節ウェーブレット参考文献などを参考にすればよい．工学的応用編からは 12.1 節不連続信号検出の原理，13.1 節相似相関検出の原理，14.1 節データ操作の考え方などを参考にしよう．

- **ウェーブレット解析を応用的側面から理解したい場合**
  これには工学的応用編が中心となる．この応用編では短時間フーリエ解析やウェーブレット解析の工学への応用の利点について，不連続信号の検出，相似相関の検出，データ操作の 3 つの原理に集約し，まず原理を述べ，その後に解析

例題をあげてこの効果を実証するという方針で解説している．したがって，12 章ウェーブレット展開による不連続信号の検出，13 章相似相関の検出，14 章ウェーブレット展開係数によるデータ操作は最も重要な部分である．インターネット編からは 3.2 節ウェーブレットダイジェスト，3.3 節ウェーブレットサイト，3.4 節ウェーブレットプレプリント，3.6 節ウェーブレットソフトウェアなどを参考にすればよい．数学的基礎編からは 4.1 節ウェーブレットの歴史，などを参考にしよう．必要になれば前章の定義等を参照することにして，8 章フィルタから始めて 9 章コンパクト台をもつウェーブレット，10 章ウェーブレットを超えてを読んでみてもよい．

大事なことは，あまり興味のないところやわからないところでも折を見て何度も眺めてみることである．きっと何らかの示唆が得られるに違いない．

目　　次

はじめに　i

本書の読み方　v

I　インターネット編　1

1　インターネット編を読むにあたって　3

1.1　インターネット編の目的について　3

1.2　インターネット編の構成と使い方について　3

2　インターネットについて　5

2.1　インターネットとは　5

2.2　WWW の基礎知識　7

2.3　ネットサーチ　9

3　ウェーブレットリソース　11

3.1　ウェーブレットチュートリアル　11

3.2　ウェーブレットダイジェスト　12

3.3　ウェーブレットサイト　14

3.4　ウェーブレットプレプリント　14

3.5　ウェーブレット参考文献　16

3.6　ウェーブレットソフトウェア　17

3.7　ウェーブレットホームページアラカルト　19

II　数学的基礎編　21

4　数学的基礎編を読むにあたって　23

4.1　ウェーブレットの歴史 23
4.2　数学的予備知識について 27
4.3　数学的基礎編で使われる記号等について 27
4.4　数学的基礎編の構成と読み方について 28
4.5　数学的基礎編で使用したソフトウェアについて 29
4.6　ウェーブレットの教科書について 30

5　ウェーブレット誕生　31

5.1　フーリエ窓変換 31
5.2　フーリエ解析の不確定性原理 33
5.3　連続ウェーブレット変換 35
5.4　一般化されたシャノンの標本定理 37
5.5　ウェーブレット展開 41
5.6　メイエのウェーブレット 46

6　多重解像度解析　51

6.1　多重解像度解析の定義 51
6.2　スケーリング関数 53
6.3　スケーリング関数の正則性 58

7　ウェーブレットの正則性　63

7.1　正規直交ウェーブレット基底の構成 63
7.2　バニシングモーメント 64

8　フィルタ　69

8.1　信号解析からの準備 69
8.2　フィルタと多重解像度解析 73
8.3　フィルタと伸張方程式 78
8.4　高速ウェーブレット変換アルゴリズム 80

9 コンパクト台をもつウェーブレット **85**
9.1 コンパクト台をもつスケーリング関数 85
9.2 スペクトル因子分解 88
9.3 コンパクト台をもつ正則スケーリング関数の構成 90
9.4 ドベシィのコンパクト台をもつウェーブレット 95
9.5 カスケードアルゴリズム 99
9.6 スケーリング関数とウェーブレットの時間周波数の窓 104

10 ウェーブレットを超えて **107**
10.1 時間周波数解析 107
10.2 ウェーブレットパケット 108
10.3 情報理論からの準備 113
10.4 最適基底アルゴリズム 118

III　工学的応用編　121

11 工学的応用編を読むにあたって **123**
11.1 工学的応用編の内容 124
11.2 ウェーブレットの紹介 125

12 ウェーブレット展開による不連続信号の検出 **131**
12.1 不連続信号検出の原理 131
12.2 ウェーブレット解析とガウス関数を用いた短時間フーリエ解析 134
12.3 雑音に覆われたパルス波形検出の例 146
12.4 機械・構造物系の地震時の累積損傷の検出 157

13 相似相関の検出 **167**
13.1 相似相関検出の原理 167
13.2 周期関数（サイン波，方形波，三角波）との相似相関の検出 172
13.3 非周期関数（ログスイープ波，孤立した波）との相似相関の検出 . . . 186
13.4 強震記録のウェーブレットパケット展開による構造物の固有周波数の
変化の検出例 191
13.5 液晶（LCD）のカラーフィルタのマクロ欠陥検出 194

14 ウェーブレット展開係数によるデータ操作 **197**

14.1 データ操作の考え方 197

14.2 データ操作の例 198

付録 A　MATLAB プログラムの例とその説明 **203**

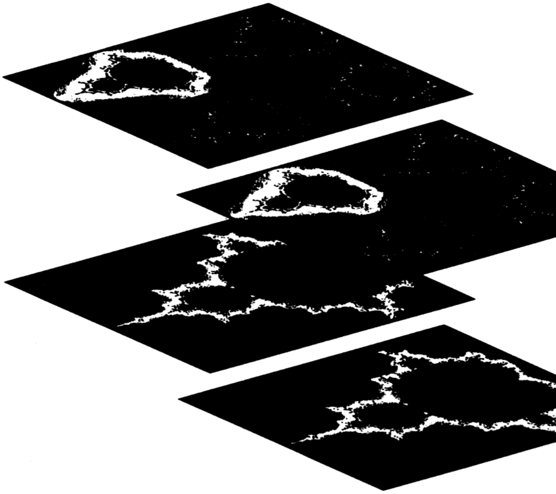
A.1 サイン波のガウス関数を用いた短時間フーリエ変換のプログラム . . . 204

A.2 サイン波のウェーブレット変換のプログラム 205

参考文献 **207**

索　　引 **209**

Part I
インターネット編



第1章

インターネット編を読むにあたって

1.1 インターネット編の目的について

ウェーブレットは80年代初めに現れた非常に新しい分野であり，フーリエ解析を補う新しい解析手段として，信号解析や画像処理等の工学や物理学，数学などの多くの分野で学際的な研究がなされている．ウェーブレットはコンピュータサイエンスと密接に結びついているため，インターネットを利用して活発に情報交換が行われている．これはコンピュータサイエンスの分野では普通のことであるが，数学など他の分野にとっては新しい研究形態であり，電子メールやFTP（ファイル転送）などの形でプレプリントや論文などが流布され，ウェーブレットダイジェスト（Wavelet Digest）というインターネット上の電子的な雑誌まで発行されたり，多くの人がWWW（World Wide Web）上にホームページを開設しているので（WWWの本当の可能性は情報の検索ではなく情報発信にある），公式な形の学術雑誌での発表や本の出版を待っていたのでは研究が間に合わないという状況になっている．このインターネット編の目的は，インターネットを使ってウェーブレットの情報を収集することにより，ウェーブレットの研究がいかにインターネットやコンピュータを使って行われているかを感じ，情報化社会における研究形態の一端をかいま見ることにある．

1.2 インターネット編の構成と使い方について

インターネット編の本論の部分は2章からなる．インターネットに関する基本的な説明とウェーブレットに関するWWW上のホームページを紹介している．

インターネット編の使い方として，時間があれば 2 章を読んでみるとよいであろう．電子メールが使えるならば 3 章のウェーブレットダイジェストの購読申込みをしよう．WWW が使える環境にあるならば 3 章のウェーブレットリソースのコメントを読みながらいくつかのホームページに接続してみて，ウェーブレットで何ができるのかをつかむとよい．多くのホームページの中から自分が興味のもてるトピックを扱っているホームページを見つけることが大切である．ホームページは扱っているトピックに関する別のホームページへのリンクをもっているのでいろいろ接続してみよう．ホームページはすぐにアップデートされるので 3 章で紹介しているホスト名では接続できない場合もある．そのときは接続できるホームページからリンクをたどったり，ネットサーチを使ったりして，新しいウェーブレットリソースを探していただきたい．

2 章はインターネットの歴史と利用可能なシステムおよび WWW に関する基礎知識（特にドメインネーム）とネットサーチについて述べている．インターネットについて詳しく知りたいときは [9] が参考になろう．

3 章はウェーブレットチュートリアル，ウェーブレットダイジェスト，ウェーブレットサイト，ウェーブレットプレプリント，ウェーブレット参考文献，ウェーブレットソフトウェア，ウェーブレットホームページアラカルトの項目に分けていくつかのホームページを紹介している．

第2章

インターネットについて

巨大な未知の情報源であるインターネットのネットワークは大航海時代の大海原に見立てることができる．我々はその未知の情報の大海をネットワークにつながった小さなコンピュータ（小舟）を頼りに航海するわけである．そのために知っておくと便利なことをいくつか述べよう．

2.1 インターネットとは

インターネット（Internet）について簡単に説明しよう．米国国防総省の軍事研究で，相手の攻撃を受ける際には攻撃目標を分散させておくと致命的な打撃を受けずに済むという理由から，情報を集中管理するのではなく，情報を複数のコンピュータに分散させて管理する実験を行ったのがインターネットのルーツである．その後，軍の手を離れて全米科学財団（NSF）に移管され，大学や研究機関などの利用を目的としたネットワークになったが，学術研究機関や企業の公的学術研究以外の目的で使うことはできなかった．現在ではこの原則は変更されて，商用利用も制限しないという合意のもと，多くのネットワークが接続されて，現在のような世界規模の巨大なネットワークに成長した．インターネットは，接続しているネットワークの共同運営であり，当初の目的は情報資源の有効利用であったが，現在では新しいコミュニケーションメディアとして注目を集めている．これがインターネットがネットワークのネットワークであるといわれる理由である．

インターネットは TCP/IP（Transmission Control Protocol/Internet Protocol）と呼ばれるプロトコル（通信手順を決めた規約）を使って通信している．日本語で通

信するときの注意点として，コンピュータの使用する漢字コードの違いがある．多くのパソコンでは，Shift-JIS と呼ばれる漢字コードを使用しているが，UNIX では JIS や EUC コード等の Shift-JIS とは異なるコード体系を使用しているので文字化けを起こす場合があり，アプリケーションで適切な漢字コードの変換を指定する必要がある．

インターネット上で利用可能な主なシステムとその特徴を説明しよう．

Telnet　Telent は，自分のコンピュータをネットワーク上の他のホストコンピュータの端末にする方法である．この場合はログイン名とパスワードからなるホストコンピュータのアカウント（接続許可）をもつ必要がある．

電子メール　電子メール（e-mail）は，その名のとおり電子的なメール（郵便）システムであるが，通常の郵便と異なる点は，送信して相手が受信するまでに要する時間がわずか（ネットワークのシステムによっては数日程度かかることもある）であり，しかもインターネットに接続しているところなら世界中のどこへでも無料（インターネット接続料等は別）で送受信することができる点である．この場合は，POP（Post Office Protocol）アカウントなどの電子メールのアドレスをもつ必要がある．

FTP　FTP（File Transfer Protocol）はネットワーク上でテキストファイル，データファイル，バイナリファイル等を送受信するためのシステムである．インターネットでは，Anonymous FTP（匿名 FTP）と呼ばれる誰でもアクセス可能な FTP サーバ（サーバとはネットワークに接続されたコンピュータに主としてファイルに関するサービスを供給する役割を果たすコンピュータ）が公開されており，これらの Anonymous FTP から，必要なファイルをダウンロードすることができる．ファイルを転送するときの注意点として，ファイルの圧縮方法の違いがある．ファイル転送にはファイルを圧縮すると効率的であることから，Anonymous FTP にあるファイルの多くは，すでに圧縮済みのファイルであり，圧縮方法は使っているコンピュータによって違うので注意を要する．

ネットニュース　ネットニュース（NetNews）はインターネット上にある電子掲示板であり，議論する場である．ネットニュースは話題や配布範囲によって膨大なニュースグループ（Newsgroup）と呼ばれる仮想的なグループに分類されている．ネットニュースの利用者が提供する情報は記事と呼ばれ，読者は興味あるニュースグループの記事だけを読むことにより，必要な情報を手に入れている．したがって，記事を投稿する場合には記事に適したニュースグループを選択す

る必要がある．ネットニュースに記事を投稿すると，世界中のニュースグループがつながっているので，投稿した記事は世界中のネットニュースを購読している人に配信される．日本語のニュースグループとしては **fj**（from Japan の略）で始まるニュースグループなどがある．

WWW WWW（World Wide Web）については次の節で詳しく説明する．

2.2 WWW の基礎知識

WWW を使う上で必要となる基礎知識を短くまとめておこう．ハイパーテキスト（HyperText）とは，ひと続きの文書ではなく，ある内容から，関連する内容へ相互に参照することができるようになっている文書の形のことをいい，WWW では HTML（HyperText Markup Language）という言語により，あるページから別のページへの接続（リンクという）を記述してハイパーテキストを実現している．一般に，HTML を解釈して画面上に画像や文字を表示するソフトウェアをブラウザと呼び，ブラウザで表示されるハイパーテキストの文書をホームページという．したがってホームページは情報の基本単位といえる．ブラウザでリンクを見つけるには特別の色や下線で強調表示されている単語を探せばよい．色付きの枠で囲まれた画像やアイコンもリンクとして働く．文書の中で述べられているリンクのある項目についてもっと情報が必要な場合には，通常その項目をクリックするだけで，詳しい情報が得られる．また，多くの文書は全く別の著者による別の文書にリンクしていて，関連した文書をすぐに参照することができる．このリンクが全世界中に広がって構成されているのが WWW の特徴である．このインターネット編では，Netscape Navigator と呼ばれるブラウザを主に使って説明する．Netscape を初めて起動すると図 2.1 のように “Netsite:” という欄に **http://home.netscape.com/** という URL（Uniform Resource Locator）が表示され，Netscape 社のホームページに接続される．URL とはファイル（資源）の住所を表すシステムで，そのファイルがどこにあるのかという情報と，どのように扱われるべきかという情報を含んでいる．また，**com** の後の **/** は trailing forward slash と呼ばれ，特にアクセスするファイルを指定せず，最後に指定したディレクトリの相手のサーバが決めたデフォルトファイル（通常は **index.html**）にアクセスすることを意味する．この URL の **home.netscape.com** は現在接続中のホストコンピュータのホスト名と呼ばれる住所である．ホスト名は終わりから読むとわかりやすい．インターネットは米国で作られたので，**com**, **edu**, **gov**, **org** 等はそれぞれ米国の組織概要：company, education, government, organization 等を表している．**netscape**

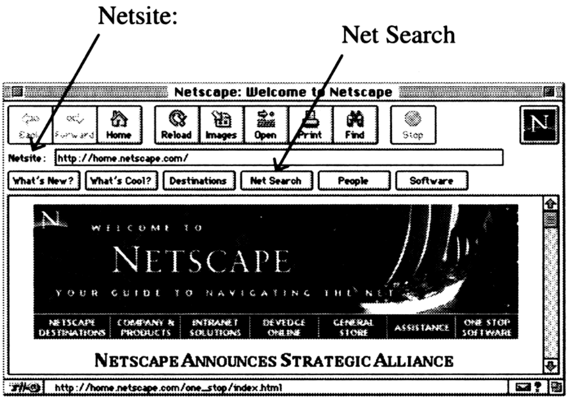


図 **2.1** Netscape Navigator の初期画面

は組織名を表している．**netscape.com** が Netscape 社という組織に与えられたドメインネームと呼ばれる住所である．通常ドメインネームはホストコンピュータの住所ではないので，**http://netscape.com/** と URL を指定して接続を試みても成功しない．ここで，**http://** は HyperText Transfer Protocol というプロトコル（通信手順）で接続することを意味すると思ってよい．FTP（ファイル転送）をする場合は **ftp://** とかくことになる．実は **home** がホストコンピュータに与えられた名前であり，ドメインネームにホストコンピュータの名前をつけることにより，ホスト名：**home.netscape.com**（コンピュータの住所）が作られている．通常，WWW を扱うコンピュータ（WWW サーバ）の名前を **www** にしておくことが多いので，たとえば，米国のホワイトハウスに接続するときには，ホワイトハウスが政府機関だからドメインネームは **whitehouse.gov** であると推測し，WWW サーバの名前を **www** であると推測して，**http://www.whitehouse.gov/** と URL を指定して接続を試みると見事に成功する．あるいは ***@math.mit.edu** というアドレスから電子メールをもらったとし，相手の組織が WWW サーバを持っているなら，**http://www.mit.edu/** と URL を指定して接続を試みると，そこには公式のサーバが **web.mit.edu** であることが述べられており，**http://web.mit.edu/** と URL を指定するとマサチューセッツ工科大学に接続できるという具合である．米国と英国以外の国では通常ドメインネームの最後は 2 文字からなる国コードである．日本のドメインネームは，終わりから国

コードの **jp**，次に **ac**（教育機関），**ad**（日本ネットワークインフォメーションセンター会員），**co**（会社），**go**（官庁），**or**（法人）等の組織属性，そして組織名からなる．たとえば，首相官邸ならドメインネームは **kantei.go.jp** である．(もちろん NTT などの例外もある.)

2.3　ネットサーチ

インターネットのように巨大なデータベースから必要とする情報をどうやって検索したらよいのだろうか．これにはネットサーチと呼ばれるサービスが提供されていて，図 2.1 の "Net Search" というボタンをクリックすると，いくつかのサーチエンジン（ネットサーチに使われるアプリケーション）にリンクするホームページが現れて，キーワード等で検索できる．

Netscape の場合には，Yahoo, Infoseek, Lycos, Magellan, Excite のどれかのサーチエンジンにリンクすることになる．もちろん，他にも多くのサーチエンジンがあってそれらにリンクすることも可能である．これらのサーチエンジンは独自の方法と情報網で検索するので，それぞれ検索結果が違うし情報の提供の仕方も異なっている．したがって，ネットサーチする場合にはいくつかのサーチエンジンで検索することが大切である．検索する前に，たとえば "Science" のように検索する範囲を大まかに絞ったり，キーワードの同意語やスペリング（単数か複数か）などにも気を配ることが検索を効率的に行うためには必要である．

たとえば，Yahoo を使って "wavelet" というキーワードで検索した場合には次のような結果であった.（最初の 2 項目のみ編集して掲載）

- Business and Economy: Companies: Computers: Software: Scientific: Mathematics: MathWorks
  * Wavelet Toolbox - extends the MATLAB Technical Computing Environment and provides a comprehensive collection of routines for examining local, multiscale, or nonstationary phenomena.

- Computers and Internet: Internet: WorldWideWeb: Browsers: Plug-Ins
  * Lightning Strike - An image compression technology based upon wavelets. The decompressor is now available as a Netscape plug-in.

また，Infoseek を使って "wavelet" というキーワードで検索した場合には次のような結果であった.（最初の 2 項目のみ編集して掲載）

- ▷ Wavelets as Multiresolution Signal Decomposition Tools
  – **http://www.connect.net/smalling/wavelet.htm**
  Wavelets as Signal Decomposition and Analysis Tools. By Elmer Smalling III.

- ▷ Wavelet Packet Fractal Analysis - Software Operating Instructions
  – **http://www.swin.edu.au/chem/bio/s+code/wpafrac1.htm**
  Author: Cameron L. Jones. Introduction: The fractal analysis programs which are here, use two dimensional Wavelet Packet Analysis.

実際のところ，ウェーブレット関係についてはそれぞれリンクするホームページはよく整理されており，優れたものが多いので，細かい配慮は必要ない．いくつかのホームページを見るとだいたいの情報は得られるであろう．

ネットサーチやサーチエンジンについてもっと知りたいときは次のホームページが参考になる．

- ▷ Augsburg College の Becoming an Informed Internet Searcher のホームページ
  http://www.augsburg.edu/library/aib/searching.html

- ▷ インディアナ大学の Understanding WWW Search Tools のホームページ
  http://www.indiana.edu/~librcsd/search/

第3章

ウェーブレットリソース

インターネットで得られる情報やファイルなどにはリソースという言葉が好んで使われる．通常 WWW サーバにはいくつものホームページがあり，WWW サーバ（もしくはサーバの集合）をサイトと呼ぶ．

この章では，ウェーブレット関係のホームページで見つけた著者が気に入ったリソースを紹介しておこう（ホームページもリソースのひとつである）．

3.1 ウェーブレットチュートリアル

ウェーブレットについての基本的な事柄を説明しているホームページを紹介しよう．これらのホームページではいろいろな画像を使って説明しているためウェーブレットを直観的に理解しやすい．WWW の真価が発揮されているといえる．

▷ Summus 社の WAVELET TECHNOLOGY のホームページ
http://www.summus.com/

Summus 社はウェーブレットによる画像圧縮のソフトウェアを開発販売している．このホームページでは画像圧縮方法を比較してデモンストレーションしている．Wavelet Thoery というページではフーリエ解析を簡単に説明した後，ウェーブレット解析による画像圧縮について実例を挙げて説明しているので一見の価値はある．画像が美しい．

▷ S. Santini の “Why Wavelets” Explanations のホームページ
http://www-cse.ucsd.edu/users/ssantini/cse228f/wavelet/wavelet.htm

ウェーブレットの美しさやウェーブレットがなぜ画像圧縮に適しているかをスライドを使って説明している．スライドはよくできており，WWW を通して講演を見ているような気がする．

▷ Robi Polikar の The Engineer's Ultimate Guide to Wavelet Analysis のホームページ
http://www.public.iastate.edu/~rpolikar/WAVELETS/WTtutorial.html

ウェーブレット変換を中心にウェーブレット理論をエンジニア向きに本格的にまとめてあり，グラフィックスもわかりやすい．

3.2 ウェーブレットダイジェスト

ウェーブレットダイジェストは 1992 年の 7 月に Björn Jawerth と Wim Sweldens によって始められた電子メールを使って配布される無料の電子雑誌（メールリスト）である．ウェーブレットダイジェストは約 1 カ月ごとに定期的に配布され，会議の公告や本，プレプリント，ソフトウェアや質問などウェーブレットに関するあらゆる種類の情報を含んでいる．ウェーブレットダイジェストを購読するのは簡単で，本文には何も書かずに電子メールを **add@wavelet.org** 宛に送信するだけである．電子メールの処理は自動的に行われ，電子メールを送信した住所がメールリストに加えられ，購読の承認とバックナンバーが電子メールで送られてくる．また，

▷ **http://www.wavelet.org/**

に接続して購読の申込みや WWW でウェーブレットダイジェストを読むこともできる．WWW で読む場合にはリンクがあるので，バックナンバーを参照したり，プレプリントをダウンロードしたりするときは便利である．ウェーブレットダイジェストのホームページには，ウェーブレットに関する行事予定（Calendar of Events），ウェーブレットダイジェストに関する説明（Detailed help information），バックナンバーへのリンク（Back Issues in HTML format），ウェーブレットダイジェスト内のキーワードサーチ（Keyword Search），著者の紹介（Wavelet Digest Team），ウェーブレット関係のホームページへのリンク（Links to other Wavelet sites）などのサービスが提供されている．ウェーブレットダイジェストに投稿する場合や購読を中止する場合には Detailed help information を読む必要があろう．参考のために，Volume 5, Issue 6 (August 16, 1996) の Today's Topics の項目だけ説明しておこう．

```
---------------------------------------------------------------------
     The Wavelet Digest - Volume 5, Issue 6 (August 16, 1996)
---------------------------------------------------------------------

   Today's Editor: Wim Sweldens
                   wim@bell-labs.com

   Today's Topics:

   1.       Announce: New look for Wavelet Digest
   2.       Book:
   3-7.     Preprint:
   8.       Thesis:
   9.       Web:
   10-14.   Meeting:
   15-16.   Job:
   17.      Contents:
   18.      Answer:
   19-24.   Question:

   Current number of subscribers: 7007
   Help information: help@wavelet.org

---------------------------------------------------------------------
```

全部で24項目あり，項目1（Announce:）はウェーブレットダイジェストの紙面刷新について，項目2（Book:）が本の紹介で主に目次が載っており，項目3–7（Preprint:）が論文のプレプリントの紹介で主にアブストラクトとURLが載っている．項目8（Thesis:）は修士論文のアブストラクトであり，項目9（Web:）はWWWのホームページの紹介である．項目10–14（Meeting:）はウェーブレットに関する会議などの公告であり，項目15–16（Job:）は仕事の公募である．項目17（Contents:）は学術雑誌の内容紹介である．項目18（Answer:）は以前質問されたことに対する購読者からの回答であり，項目19–24（Question:）は購読者に対する質問である．通常すべて

の項目に WWW のホームページや電子メール等のアドレスが載っており，何らかの形でコンタクトが取れるようになっている．

3.3　ウェーブレットサイト

ウェーブレットに関する多くのサイトへのリンクを集めているホームページを 2 つ紹介しよう．いずれもほとんどコメントがないがいろいろなホームページを見るときは便利である．

▷ ザルツブルグ大学数学教室の Wavelet のホームページ
http://www.mat.sbg.ac.at/~uhl/wav.html

Internet Sources（WWW-Server, Gopher-Server, FTP-Server）と Bibtex Bibliographies からなる．

▷ ワシントン大学セントルイス校の Wavelet NetCare のホームページ
http://www.artsci.wustl.edu/~xihua/html/WaveletNetCare.html

WWW-Server, FTP-Server, Bibliography からなる．

3.4　ウェーブレットプレプリント

ウェーブレット関係のプレプリントのリンクを集めたホームページはいくつもあるがその中から 2 つ紹介しよう．

▷ MathSoft 社の Wavelet Resources のホームページ
http://www.mathsoft.com/wavelets.html

MathSoft 社は S+Wavelets という信号および画像処理のソフトを開発し販売している会社である．Wavelet Resources のホームページは，ウェーブレットダイジェストに投稿された論文等のプレプリントへのリンクだけでなく，世界中の数学，工学，物理学にわたって幅広くウェーブレットとその応用に関するプレプリントのリンクを集めたリストである．このリストは，Introductions to Wavelets, General Theory, M-Band Wavelets and Filter Banks, Wavelets and General Signal Processing, Wavelets and Image Processing, Wavelets and Partial Differential Equations, Wavelets and Statistics, Wavelets and Physics（一部抜粋）等の項目に分類されていて，欲しいプ

レプリントがあればリンクをクリックするだけでよい．通常は FTP で接続されて自動的に目的のファイルがダウンロードできる．リンク先が知りたければ，Netscape の場合はホームページをテキストファイルあるいはソースファイルとして保存できるから，ソースファイルとして保存すれば，HTML も込めて保存できる．このようにして得られた Wavelet Resources のホームページの項目：Introductions to Wavelets の一部を編集して引用しよう．

(1) C. S. Burrus and R. A. Gopinath, "A Tutorial Overview of Wavelets, Filter Banks and Interrelationships."
`ftp://cml.rice.edu/pub/reports/9301.ps.Z`

(2) E. Gootman and M. Wickerhauser, "Elementary Wavelets."
`ftp://pascal.math.yale.edu/pub/wavelets/papers/elemwave.tex`

(3) A. Graps, "An Introduction To Wavelets."
`ftp://ftp.best.com/pub/agraps/papers/IEEEwavelet.ps.gz`

(4) J. Lewalle, "Tutorial on Wavelet Analysis of Experimental Data."
`http://www.mame.syr.edu/faculty/lewalle/tutor/tutor.html`

これらのファイル名には拡張子がついていることに注意しよう．(1) はファイルの拡張子が `*.Z` であるからファイルの圧縮方法は UNIX compress である．(2) はファイルの拡張子が `*.tex` であるからファイルは圧縮されておらず，通常の TeX のテキストファイルである．(3) はファイルの拡張子が `*.gz` であるからファイルの圧縮方法は gzip である．(4) はファイルの拡張子が `*.html` であるからファイルは圧縮されておらず，通常の HTML のテキストファイルである．したがって，(2) と (4) は通常のエディタで読むことができるが，(1) と (3) はファイルを解凍（圧縮をもとに戻すこと）する必要があり，適当な解凍アプリケーションがインストールされていれば，Netscape はこのアプリケーションを使って自動的に解凍を行う．解凍がうまくいかないときは，目的のファイルを含むディレクトリを見てみるとよい．別の圧縮方法を使ったファイルや圧縮していないファイルが提供されていることもある．さらに，(1) と (3) は拡張子が `*.ps` であるからポストスクリプト（PostScript）ファイルである．ポストスクリプトとはテキストやグラフィックスを含んだページを記述し，プリンタ等に描写する言語であって，UNIX では標準的に使われている．ポストスクリプトファイルを印刷するにはポストスクリプト言語を理解するポストスクリプトプリンタが必要

であり，ポストスクリプトプリンタで印刷することをダウンロードするという．このようにして得られたポストスクリプトファイルをダウンロードするには，Macintosh や Windows ではユーティリティソフトを使う．ユーティリティソフトがポストスクリプトプリンタに付属していない場合にはプリンタの製造元がインターネット等で配布していることもある．ポストスクリプトプリンタを Apple Talk で Macintosh に接続している場合には Bare Bones Software 社のフリーソフトの Drop*PS が便利である．

▷ Bare Bones Software 社の Freeware Product のホームページ
http://www.barebones.com/freeware.html

また，Macintosh や Windows でポストスクリプトファイルをつくるには，印刷するときのオプションでプリンタにダウンロード（印刷）ではなく，ファイルにダウンロードを選べばよい．ポストスクリプトファイルは印刷してみるまで内容がわからない場合もあるので，最後のページから印刷されるように設定している人もいる．ポストスクリプトについて詳しく知りたければ次のホームページが参考になる．

▷ Adobe Systems 社の PostScript のホームページ
http://www.adobe.com/prodindex/postscript/

もうひとつ，ウェーブレットに関する論文等のプレプリントがキーワードで検索できるホームページを紹介しよう．

▷ University of Karlsruhe の Bibliographies on Wavelets のホームページ
http://liinwww.ira.uka.de/bibliography/Theory/Wavelets/

3.5　ウェーブレット参考文献

参考文献のテキストファイルを提供しているホームページもある．

▷ ザルツブルグ大学数学教室の Wavelet の My own Bibliography のホームページ
http://www.mat.sbg.ac.at/~uhl/wavelet.bib

▷ サウスカロライナ大学数学教室の THE WAVELET DIGEST の LISTS OF REFERENCES のホームページ
http://www.math.sc.edu/~wavelet/References.html

たとえば，LISTS OF REFERENCES のホームページからは

▷ テキサス A&M 大学の Steve Baum による **baum.bib**
BiBTeX format, 200 entries, last update December 1994.

▷ アムステルダム大学の Tom Koornwinder による **koornwinder.ref**
Ascii format, 300 entries, last update October 1992.

等のテキストファイルがダウンロードでき自由に使えるが著者に対する謝辞を忘れてはならない．**baum.bib** は BibTeX 用のテキストファイルである．また，**koornwinder.ref** は単なるテキストファイルであり，BibTeX を使わないときにはこちらが便利であろう．

3.6　ウェーブレットソフトウェア

ウェーブレットのソフトウェアに関するホームページは数多い．フリーウェアやシェアウェアなどを提供するホームページと販売されているソフトウェアに関する情報を提供するホームページとに大別できる．これらに関する情報は

▷ Amara Graps の Amara's Wavelet Page のホームページ
http://www.amara.com/current/wavelet.html

に適切なコメントとともに紹介されている．他にも多くのウェーブレットのソフトを紹介するホームページがあるが，ここではウェーブレットに限らず数学全般にわたってソフトのリンクを集めているホームページをひとつだけ挙げておこう．

▷ サウスカロライナ大学数学教室の Mathematics Information Servers のホームページ
http://www.math.psu.edu/MathLists/Contents.html

次に，著者が実際に使ってみたソフトウェアについてのホームページをいくつか紹介しよう．

▷ スタンフォード大学の WaveLab
http://playfair.stanford.edu/~wavelab

WaveLab は David Donoho らスタンフォード大学のメンバー等により MATLAB を使って書かれており，900 を超える MATLAB のファイルからなるフリーウェアで

あるがレジストレーションが必要である．もちろん MATLAB がなければ使えない．Macintosh，UNIX そして Windows 用のファイルが提供されている．ウェーブレット解析やウェーブレットパケット解析などをカバーするが，とりわけ David Donoho らによって提唱された wavelet shrinkage の部分は圧巻である．

▷ The MathWorks の The MATLAB Wavelet Toolbox
http://www.mathworks.com/wavelet.html

MATLAB は The MathWorks 社が開発し販売している Macintosh，UNIX そして Windows 上で動く，行列の数値計算とグラフィックスが簡単にできるソフトウェアであり，The MATLAB Wavelet Toolbox は MATLAB を使ってプログラムされた Toolbox と呼ばれる拡張パッケージのひとつである．したがって MATLAB がなければ使えない．1 次元と 2 次元の各種のウェーブレット解析をカバーし，グラフィックスの完成度には目を見張るものがある．テキストファイルのプログラムソースは容易に書き換えることができる．しかも最も基本的な部分はバイナリで書かれているので計算速度は速い．The MathWorks のホームページではこれらのソフトウェアに関する情報が得られる．

▷ Jack Cohen の Mathematica wavelet programs
http://www.cwp.mines.edu/software.html

Jack Cohen は Mathematica を使っていくつかの教育的プログラムを作っており，Mathematica wavelet programs はその中のひとつである．プログラムと共にノートブックと呼ばれる Mathematica の文書でメイエやドベシィのウェーブレットあるいはマルバールのウェーブレットなどを丁寧に解説している．このようなノートブックを早い時期から無料で提供していることに敬意を表したい．Mathematica がなければプログラムを実行することはできないが，Wolfram Research 社が提供しているフリーソフトの MathReader を使えば，ノートブックを読むことはできる．

▷ Wolfram Research の Wavelet Explorer
http://www.wolfram.com/mathematica/applications

Mathematica は Wolfram Research 社が開発し販売している Macintosh，UNIX そして Windows 上で動く，数式処理とグラフィックスが簡単にできるソフトウェアであり，Wavelet Explorer は Mathematica を使ってプログラムされた applications と

呼ばれる拡張パッケージのひとつである．したがって Mathematica がなければ使えない．1 次元と 2 次元の各種のウェーブレット解析をカバーし，すべてのプログラムソースはテキストファイルであり容易に理解でき，書き換えることができる．Wolfram Research のホームページではこれらのソフトウェアに関する情報が得られる．

▷ Digital Diagnostics Corporation とエール大学の Wavelet Packet Laboratory for Windows
http://www.portal.com/~rww/dir_akp/akp_wavtop.html

Wavelet Packet Laboratory for Windows はその名のとおり Windows 上で動くウェーブレットパケット解析などの時間周波数解析をサポートするパッケージである．マニュアルは簡潔にまとめられていて数学的にもよく書けている．早くからリリースされていて，価格も MATLAB や Mathematica に比べ低く手頃であるが，プログラムはバイナリであるため書き換えることはできない．

▷ Darryl Spencer の Wavelet
ftp://ftp.iij.ad.jp/pub/info-mac/_Graphic_%26_Sound_Tool/grf/wavelet.hqx

Wavelet は Macintosh 用のフリーウェアであり，画像の圧縮率を簡単な操作で変えることができて，ウェーブレットを使った画像圧縮の効果を目で見ることができる．

▷ Intergalactic Reality の MacWavelets
http://www.intergalact.com/macwavelets/macwavelets.html

MacWavelets v1.00 は Macintosh 用のフリーウェアであったが，MacWavelets v2.00 は 2 次元の画像処理をサポートしてシェアウェアとなった．Macintosh 用アプリケーションのため簡単に操作でき，プログラム等の知識を必要としない．MATLAB 等の他のアプリケーションを必要とせず単独で動き，ウェーブレットのことを理解する入門ソフトとしてはシェアウェア料金以上の働きをするといえる．

3.7　ウェーブレットホームページアラカルト

▷ Christopher Brislawn の The FBI Fingerprint Image Compression Standard のホームページ
http://www.c3.lanl.gov/~brislawn/FBI/FBI.html

このホームページでは FBI（Federal Bureau of Investigation）で使われている指紋をデジタル信号に符号化するアルゴリズム Wavelet/Scalar Quantization（WSQ）について実例を挙げて説明している．応用上何が問題になるのかがよくわかる．

▷ Jelena Kovacevic の Welcome to my home page! のホームページ
http://cm.bell-labs.com/cm/ms/who/jelena/index.html

彼女らの本 Wavelets and Subband Coding の紹介やいろいろな Wavelet groups へリンクするホームページ：Links to other wavelet/multirate sites がある．

▷ Jo Yew の Welcome to Jo Yew's Paradise のホームページ
http://www.cadcam.nus.sg/~ele22091/Proj.html

Others' Home Pages on Wavelets Related Stuffs! では Ingrid Daubechies や Gilbert Strang 等のホームページへのリンクがある．

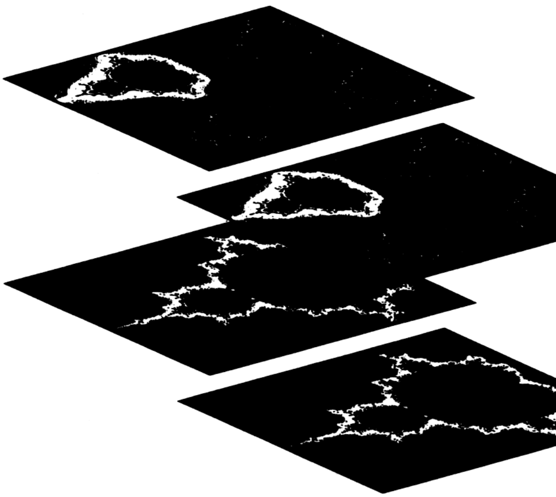
▷ Roberto M. Cesar Jr. の Multiscale Shape Representation and Description のホームページ
http://www.ifqsc.sc.usp.br/ifsc/ffi/grupos/instrum/visao/projects/shapes/pinda/shapes.htm

連続ウェーブレット変換をコンピュータビジョンやパターン認識などに応用するいくつかの試みについて説明している．

▷ Publishers' Catalogs Home Page のホームページ
http://www.lights.com/publisher/

いろいろな国の多くの出版社のホームページへのリンクがあり参考文献の単行本などの内容等をチェックするのに便利である．

Part II
数学的基礎編



第4章

数学的基礎編を読むにあたって

ウェーブレットの数学的理論を始める前に必要となる予備知識を短くまとめておこう．

4.1 ウェーブレットの歴史

ウェーブレットの歴史については [20] が数学的予備知識を必要とせず読み物として非常に面白い．また，[23] や [21] などは実際に理論をつくってきた人たちが歴史について述べているので重みがある．これらの本をもとに歴史を振り返ってみよう．

現在のウェーブレット理論の歴史は非常に浅く，80 年代初めに現れたにすぎない．しかし，理論的アイデアにしても実際の応用にしても大部分はウェーブレットが数学における新しい道具として現れるずっと以前から知られていたことなのである．たとえば，メイエ（Meyer）は [23] の中で，1930 年代の数学におけるウェーブレットのルーツ（Lévy and Brownian motion, Littlewood-Paley theory, Franklin system, wavelets of Lusin）あるいはそれ以降の atomic decompositions また Strömberg's wavelets について述べている．また，信号理論におけるルーツとしてガボール（Gabor）やビル（Ville）の時間周波数解析における仕事や画像処理におけるルーツとしてバート（Burt）とアデルソン（Adelson）によるピラミッドアルゴリズムなど，多くのルーツを述べている．それではなぜウェーブレットがこれほど熱狂的に研究されているのであろうか．[20] によれば，1986 年に 23 歳のコンピュータ映像専攻の大学院生だったマラー（Mallat）が数学者のメイエに，メイエたちがやってることも電子工学のエンジニアがやってることも画像処理の人たちがやってることも，みんな同じこと

を違う名のもとにやっているのだということを説明したのが発端で，マラーとメイエは多重解像度解析の枠組みを作り上げげたということであるから，それまでは他の分野の人たちが自分と同じことをしているとは誰も考えていなかったのである．[Mallat: Multiresolution approximations and wavelet orthonormal bases of $L^2(\mathbf{R})$, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **315** (1989), 69–87]．気がついてみると，科学の多くの分野で同じような研究がされていて，これらを統一して説明する理論としてウェーブレット理論はつくられてきたというのがひとつの大きな理由であろう．この統一して説明しようという動きは大きなうねりとなって非常に多くの分野で共同研究が行われ，それぞれの分野の科学的理解に深い影響を与えて今日に至っている．

現在のウェーブレット理論は 1980 年代初頭にモルレー（Morlet）が考えた "wavelets of constant shape" を使った新しい時間周波数解析に始まるとされている．時間周波数解析とはフーリエ解析のように三角関数の波の重ね合せで関数（信号）を表現するのではなく，短い波 "wavelets" の重ね合せで関数（信号）を表現するというものである．これはちょうど楽譜を思い浮かべてもらえばよい．ある周波数の音がある時間に演奏されて，その重ね合せが音楽になっている．音楽を楽譜で表すことが時間周波数解析であると思えばよい．モルレー以前に "wavelets" という言葉は使われていたのでモルレーは "wavelets of constant shape" という言葉を使ったことを注意しておく．時間周波数解析には不確定性原理という大きな制限があって，時間と周波数の両方の情報を同時に詳しく知ることはできないことが証明されている．1946 年にガボールは短時間フーリエ変換という時間周波数解析を導入した．[Gabor: Theory of communication, *Journ. IEE*, **93** (1946), 429–457]．ガボールは不確定性原理という制限の中では理論的に最良のガウシアンと呼ばれる関数を使うことを提案したので，ガウシアンを使う短時間フーリエ変換を特にガボール変換と呼び，多くのエンジニアが使っている．モルレーは 1975 年ごろガボール変換を使って石油探査を行うフランスの石油会社 Elf-Aquitaine のエンジニアであった．石油探査の標準的方法は地中に振動や衝撃を与えてその反射波を解析するというもので，反射波は直接反射してくる波や何度か反射を繰返してくる波が入り交じっていて地層が数百もあるので解析は困難をきわめていた．新しい強力なコンピュータを導入し，ガボール変換による詳しい時間周波数解析をしてもなんら新しい結果を生み出さなかった．そこでモルレーは全く新しい発想のもとに，ひとつの波を拡大縮小して時間周波数解析の短い波 "wavelets" に使ったのである．モルレーはこの波を "wavelets of constant shape" と呼んだ．ウェーブレット変換の誕生である．短時間フーリエ変換は波の続く時間は変えずに振動数を変えるというものであるので短い波 "wavelets" の形は変わることを考

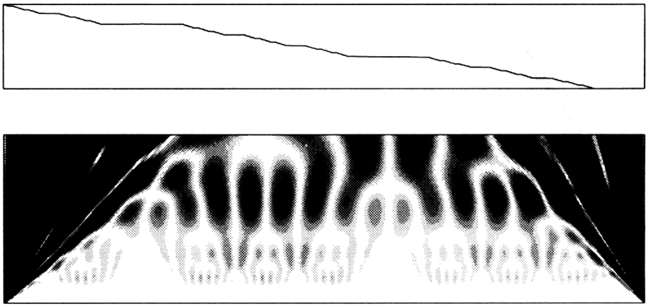
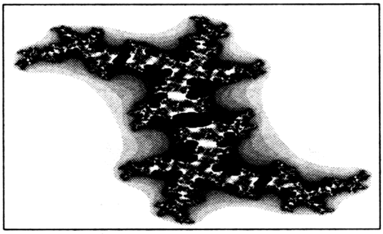


図 4.1　コッホ曲線（上）とその連続ウェーブレット変換像（下）

えれば，全く逆の発想であるといえよう．しかし，同僚には信じてもらえず，1981 年にエコールポリテクニックのクラスメートであった物理学者のバリアン（Balian）に相談し，マルセイユの理論物理学者のグロスマン（Grossmann）を紹介され，マルセイユのグループ（この中には後にウェーブレット理論で大きな仕事をするドベシィ（Daubechies）も含まれていたのだが）は数値実験的には非常に効果があったモルレーのウェーブレット変換の理論的基礎を構築することになったのである．[Grossmann and Morlet: Decomposition of Hardy functions into square integrable wavelets of constant shape, *SIAM J. Math. Anal.*, **15** (1984), 723–736]．図 4.1 はモルレーのウェーブレットを使ってコッホ曲線（Koch curve）と呼ばれる曲線を MATLAB により連続ウェーブレット変換した例である．コッホ曲線の自己相似性が連続ウェーブレット変換により強調されてはっきり読みとれる．

ウェーブレット解析が数学の分野に入ってきたのは [21] によれば 1985 年のことで，メイエが同僚の物理学者ラスクー（Lascoux）にグロスマンとモルレーによるウェーブレット変換を紹介されたことに始まるようである．メイエはウェーブレット変換が数学ではすでに知られていたカルデロン（Calderón）の単位の分解と呼ばれている公式と深い関係があることを見抜いたのだが，この公式が時間周波数解析に応用できるということは考えてもみないことだったのである．深い感銘を受けたメイエはすぐにグロスマンに会うためにマルセイユ行きの列車に乗り，共同研究することになったのである．ウェーブレット変換は 1 変数関数が 2 変数関数に変換されるので，解析する信号の情報を過剰に含んでいる．もちろん，この情報の繰返しによってデータが解析しやすくなったり，パターンを認識しやすくなる利点があるが，多くの情報を必要とす



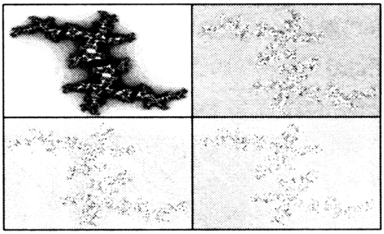


図 4.2　ジュリア集合の原画像（左）とウェーブレット分解画像（右）

るので効率的とはいえない．効率的なウェーブレット変換という考え方を推し進めると，ウェーブレットによる正規直交基底が構成できるかという問題になり，1985 年にメイエは時間周波数解析に応用できるような良い性質をもったウェーブレットによる正規直交基底が存在しないことを証明しようとして，逆に構成してしまったというから面白い．ウェーブレット展開の誕生である．[Meyer: Principe d'incertitude, bases hilbertiennes et algèbres d'opérateurs, *Séminaire Bourbaki*, **662** (1986), 209–223].

1986 年にはすでに述べたようにマラーが数学，信号理論，画像処理における共通性に気づき，ラプラシアンピラミッドアルゴリズムに基づき高速ウェーブレット変換アルゴリズムを考えている．この新しいアルゴリズムは信号処理や画像処理においてはデータ圧縮等に，コンピュータ映像においてはエッヂの検出等に広く使われている．当初はスプラインと呼ばれる関数から，バトル（Battle）とルマリエ（Lemarié）が構成したウェーブレットを切り落として使っていたので，誤差がつきものであった．この切落し誤差を避けるにはコンパクト台をもつウェーブレット基底を構成しなければならなかった．ドベシィは 1987 年にコンパクト台をもつウェーブレット基底を構成したのであるが，信号理論における有限インパルス応答フィルタに関連した考察により，よく知られた関数や公式などを使って構成したのではなく，カスケードアルゴリズムという反復操作を無限回行った極限関数として構成し，まさしくコンピュータ時代の産物といえるものであった．[Daubechies: Orthonormal bases of compactly supported wavelets, *Comm. Pure Appl. Math.*, **41** (1988), 909–996]．彼女のコンパクト台をもつウェーブレット基底を使った高速ウェーブレット変換アルゴリズムにより，多くの分野で広くウェーブレット解析が使われている．図 4.2 はドベシィのウェーブレット（$N=3$）を使ってジュリア集合（Julia set）と呼ばれる画像を MATLAB により画像処理した例である．分解画像の左上の画像は原画像のデータ数を 1/4 倍に

圧縮した画像になる．

1988 年以降もウェーブレットに関する多くの仕事があるが，その中で代表的なものをいくつかあげると，画像処理における対称性の要求から生まれた双直交（**biorthogonal**）ウェーブレット，解析したい信号にあわせて基底を取り替えて時間周波数解析を行うウェーブレットパケット（**wavelet packet**）などがある．これらの新しい理論はすでに応用されていて，有名なところでは FBI の指紋検索システムに使われている．ウェーブレット理論の進歩はめざましく，情報はインターネットを使い多くの人々の間で交換され，新しい時代の共同研究をかいま見るようである．詳しくはインターネット編をご覧いただきたい．

4.2　数学的予備知識について

ウェーブレット解析は関数の性質を調べたり表現したりする新しい方法であるが，フーリエ解析にとって代わるものではなく補うものであることに注意しよう．ウェーブレット解析を理解するためにはフーリエ解析で何がどのように解析できるのかという具体的な工学的知識が必要不可欠である．数学的な知識については，[4] の 2 章程度でよい．フーリエ解析は超関数の意味で考えるときわめて見通しが良くなるので，超関数の意味で議論している箇所が数カ所あるが，読者はこれを認めるだけでよいであろう．大切なのは超関数の理論によって細かい条件などを気にせずにいろいろな計算が自由自在にできるということであって，このような計算を超関数の意味で正当化することは簡単なことではない．興味のある読者は [6], [11], [19], [30] などが参考になる．もちろん実解析のルベーグ積分やヒルベルト空間 $L^2(\mathbf{R})$ に関する知識もある程度は必要で，数学的基礎編ではいくつかの定理等を既知として議論を進めている．これらについて知らない読者は [7] などに目を通すことをお勧めする．

4.3　数学的基礎編で使われる記号等について

整数の集合を $\mathbf{Z}$，非負の整数の集合を $\mathbf{Z}_+$，自然数の集合を $\mathbf{N}$，実数の集合を $\mathbf{R}$，複素数の集合を $\mathbf{C}$ と表す．集合の記号は通常の表記に従う．たとえば，$k \in \mathbf{Z}$ は k が整数であると読めるし，$\sum_{k\in\mathbf{Z}}$ は k を整数全体にわたって動かしたときの和であると読む．$f := g$ は左辺 f を右辺 g で定義すると読む．関数 f と整数 $j, k \in \mathbf{Z}$ に対し，$f_{jk}(x) := 2^{j/2} f(2^j x - k)$ とかく．x/y は $\frac{x}{y}$ を表す．数学的基礎編で扱う関数は一般に 1 変数 x の複素数値関数であって，フーリエ変換あるいは級数の変数は ξ を

使う．信号解析の慣例にしたがって，関数を信号，x を時間，ξ を周波数と呼ぶ．積分区間が明らかな場合には省略して明示しないこともある．

4.4　数学的基礎編の構成と読み方について

数学的基礎編の数学的理論の部分は 6 章からなる．1 変数のウェーブレット正規直交基底に焦点をあて，周波数領域における解析に重点をおいて説明している．その理由は連続ウェーブレット変換については [4] があり，時間領域における解析に重点をおいて双直交基底についても説明した教科書として [3] があるので，これらの教科書がカバーしていない部分を説明する必要があると考えたからである．したがってこれら 2 冊の教科書もあわせて読めばウェーブレット理論についての概要がつかめるであろう．

数学的基礎編の読み方として，まず証明や理解できないところはとばして全体に目を通し，ウェーブレットとは何か，何が問題になっているのかをつかむとよい．そして興味をもった部分があれば詳しく読めばよい．

5 章では簡単にフーリエ窓変換と連続ウェーブレット変換について説明している．これらは目を通すだけでよい．詳しくは [4] をみよ．一般化されたシャノンの標本定理をもとにウェーブレット展開を定義し，具体的にメイエのウェーブレットを構成する部分はウェーブレット正規直交基底を理解する上で重要な部分である．

6 章ではメイエのウェーブレットを構成した手順を抽象化し，多重解像度解析を定義している．多重解像度解析は科学の多くの分野でなされてきた同じような研究を統一して説明する理論であるので，ウェーブレットについての予備知識がないと数学的基礎編で最も難しい章ということになる．多重解像度解析はスケーリング関数から定義され，スケーリング関数の正則性から，多項式をスケーリング関数の整数だけ平行移動した関数の線形結合で誤差なく表現できることを導く．詳しくは [12] および [22] をみよ．

7 章ではウェーブレットの正則性について述べている．スケーリング関数の正則性からウェーブレットの正則性が導かれ，ウェーブレットの正則性はウェーブレットのバニシングモーメントと関係する．バニシングモーメントは応用上重要な役割と果たす．詳しくは [22] および [13] をみよ．

8 章ではウェーブレットを理解するために必要な信号解析の知識を整理し，フィルタからウェーブレットを構成する方法を述べている．ウェーブレット理論が信号解析から大きな影響を受けていることがわかる．さらに数値計算をするために必要となる

高速ウェーブレット変換アルゴリズムについて説明する．詳しくは信号解析については [25] および [17]，高速ウェーブレット変換アルゴリズムについては [12] をみよ．

9 章ではコンパクト台をもつウェーブレットについて述べている．信号解析からスペクトル因子分解を準備し，ドベシィのコンパクト台をもつウェーブレットの構成法とそのグラフ，時間周波数の窓などについて理論と共に数値計算例を説明する．実際に数値計算して試すことが大切である．詳しくは [13] および [3] をみよ．

10 章ではウェーブレット正規直交基底の拡張について述べている．時間周波数解析に関連して，ウェーブレットパケットおよび最適基底について簡単に説明する．詳しくは [29] をみよ．これ以外にも多くの拡張が考えられている．詳しくは [26] をみよ．

4.5　数学的基礎編で使用したソフトウェアについて

数学的基礎編で数値計算に使用したソフトウェアは MATLAB と Mathematica である．MATLAB（Matrix Laboratory）はもともと Fortran 言語を知らない人でも行列計算が対話的にできるように Fortran 言語を使って作られ，現在は C 言語化されてグラフィックス等に関する機能が拡充された対話型のソフトウェアである．たとえば [1] をみよ．また，Mathematica は記号処理の LISP に似た考え方を発展させて作られたので数式処理を得意とし，グラフィックスにも優れた対話型のソフトウェアである．現在ではどちらのソフトウェアにもウェーブレット解析をするためのパッケージが別売されていて，簡単にウェーブレット解析ができる環境にある．また，MATLAB を使った多くのウェーブレット解析のプログラムがインターネット上で公開されていて容易に手に入れることができる．詳しくはインターネット編を参照していただきたい．

MATLAB と Mathematica を使って数値計算した結果はすぐにグラフィックスで表現でき，ポストスクリプトファイル（PostScript file）として出力できる．数学的基礎編の図はすべてこのポストスクリプトファイルを Adobe Illustrator というソフトウェアを使って編集した後，EPSF（Encapsulated PostScript File）として再出力し，LaTeX のコマンドを使って本文に取り込んでいる．これらの製品の情報については，たとえば WWW を使って知ることができる．

MATLAB については	`http://www.mathworks.com/`
Mathematica については	`http://www.wolfram.com/`
Adobe Illustrator については	`http://www.adobe.com/`

に接続してみるとよい．

4.6　ウェーブレットの教科書について

和書のウェーブレットの教科書で現在出版されているものは [2], [3], [4], [5], [8] の 5 つである．[2] は Mathematica を使ったウェーブレット変換のプログラムと工学への応用がまとめられていて，フロッピーディスクが付属する．[3] は非常に手際良くまとめられていて，数学的には [4] より基本的で付属の CD-ROM にオリジナルの Mathematica のプログラムが収められていて良くできている．とくにドベシィのウェーブレットとスプラインウェーブレットに詳しい．[4] は原本が非常に優れた入門書であるため，最も優れた和書の入門書であるといえる．とくにスプラインウェーブレットに詳しく数学のレベルも高い．[5] は理論と応用がいろいろな図を使って説明されていて，とくに工学への応用が詳しい．[8] は原本が複数の著者で執筆された専門書であり，唯一の和書の専門書であるといえる．

洋書のウェーブレットの教科書のうち最も評判の高いものを 2 つ挙げると，[13] と [22] である．[22] は 3 巻からなる仏語原本の第 1 巻の英訳である．[13] は非常によく書けており，ほとんどの人が使っている教科書であると思われる．[22] は数学のレベルが非常に高い専門書である．ウェーブレットを紹介する本として [23] があり，いろいろな分野の人々を対象にした講義がもとになっているので，数学的証明がほとんど載ってない．これも仏語版からの英訳である．最近出版された中で [18] はウェーブレット変換に焦点をあてて，フラクタルなど広範囲をカバーした数学の専門書である．[12] はコーエンの仏語版の本がもとになっていてフィルタとウェーブレットの関係がよくわかる簡潔な本である．[28] はフーリエ解析などの実解析の素養があれば数学的にすっきりしていて非常に読みやすい．[26] はフィルタバンクとウェーブレットの関係が詳しく書かれており，多くの練習問題と巻末に MATLAB の Wavelet Toolbox を使って解く練習問題が載っていて読みごたえのある教科書を意識して書かれた本である．[29] は C 言語で書かれたプログラムソースが載っていて，ウェーブレットパケットや最適基底アルゴリズムに詳しい．[20] は数学者の妻でフリーライターの著者が，多くの人々にインタビューして，ウェーブレットがどのようにつられてきたかを数学を知らない人達にもわかるようにリアリティあふれる文章で紹介した非常に面白い本である．以上の他に幾つも出版されていて，どれも特徴を持っている．

第 5 章

ウェーブレット誕生

5.1　フーリエ窓変換

フーリエ変換から始めよう．実数 $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ 上の関数 f（一般には複素数値関数）のフーリエ変換と関数 g の逆フーリエ変換を

$$\mathcal{F}[f(x)](\xi) = \widehat{f}(\xi) := \int e^{-ix\xi} f(x)\, dx$$

$$\mathcal{F}^{-1}[g(\xi)](x) := \frac{1}{2\pi} \int e^{ix\xi} g(\xi)\, d\xi$$

とおく．フーリエ変換はいろいろな関数 f に対して定義できるのだが，f とフーリエ像 $\widehat{f}$ の両方を考えることにより関数 f の性質をより詳しく調べることができるので，フーリエ像 $\widehat{f}$ がどうなるかを知っておくことは大切である．たとえば，f が $\int_{\mathbf{R}} |f(x)|\, dx < +\infty$ を満たすなら $\widehat{f}$ は $\mathbf{R}$ 上有界連続な関数であって，かつ $\lim_{|\xi|\to+\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$ であることが知られている（リーマン・ルベーグの定理）．また，$\int_{\mathbf{R}} |f(x)|^2\, dx < +\infty$, を満たすような関数 f の集合を $L^2(\mathbf{R})$ と表す．普通 $L^2(\mathbf{R})$ には

$$(f, g) := \int f(x)\overline{g(x)}\, dx \qquad (f, g \in L^2(\mathbf{R}))$$

で内積を定義し，有限次元のユークリッド空間 $\mathbf{R}^n$ の無限次元への自然な拡張であるヒルベルト空間として考える．つまり，$f \in L^2(\mathbf{R})$ のノルムを $\|f\| := \sqrt{(f, f)}$ で定義するとき，関数列 $\{f_n\} \subset L^2(\mathbf{R})$ がノルムに関してコーシー列をなすなら（すなわち $\lim_{m,n\to+\infty} \|f_m - f_n\| = 0$ が成り立つなら），ある f が $L^2(\mathbf{R})$ に存在して，

$\lim_{n\to+\infty}||f_n - f|| = 0$ が成り立つ，という性質（完備性）を持つ．$f \in L^2(\mathbf{R})$ なら $\widehat{f} \in L^2(\mathbf{R})$ である．ここで大切なのは次のパーシバルの等式である．

$$(f,g) = \frac{1}{2\pi}\left(\widehat{f},\widehat{g}\right) \qquad (f,g \in L^2(\mathbf{R})) \tag{5.1}$$

この等式から導けることは，$L^2(\mathbf{R})$ のフーリエ像全体は同じ $L^2(\mathbf{R})$ 全体になっていて，１対１対応なので逆の対応が考えられて，フーリエ変換がヒルベルト空間の性質をそのまま保存する（同型写像という）ことである．

さて関数 f の点 $x = b$ の近傍での性質が知りたいとしよう．f のフーリエ変換は積分を $\mathbf{R}$ 全体で行うので，f のすべての点における情報を含んでしまう．このため，よく使われるのが切落し関数を f にかける方法である．このような操作を f を点 $x = b$ の近傍に**局所化**するという．点 $x = b$ の近傍で 1 に近く，遠くで 0 に近づく関数を考えよう．このような関数として，点 $x = 0$ の近傍で 1 に近く，遠くで 0 に近づく関数 $w(x)$ をひとつとり，これを平行移動した関数 $w(x-b)$ の複素共役 $\overline{w(x-b)}$ を考えるとフーリエ変換の色々な定理がうまく使えて都合がよい．

定義 5.1.1　恒等的に 0 でない関数 $w(x) \in L^2(\mathbf{R})$ が $xw(x) \in L^2(\mathbf{R})$ を満たすとき，**窓関数**と呼ばれる．

$w(x)$ が窓関数なら，$w(x) \in L^1(\mathbf{R})$ が示せるので，リーマン・ルベーグの定理より $\widehat{w}(\xi)$ は有界連続関数となる．

定義 5.1.2　$w(x)$ を窓関数とする．$f \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$f(x)\overline{w(x-b)}$ のフーリエ変換を f の窓関数 $w(x)$ による**窓フーリエ変換**という．

5.2 節で述べる時間周波数の窓を考えるには，$w(x)$ と $\widehat{w}(\xi)$ が窓関数であることが必要である．$w(x)$ と $\widehat{w}(\xi)$ が窓関数であるとしよう．f の窓関数 $w(x)$ による窓フーリエ変換の $\xi = \omega$ における値

$$\int e^{-ix\omega}\, f(x)\overline{w(x-b)}\, dx$$

は

$$W_{b,\omega}(x) := e^{i\omega x}\, w(x-b)$$

とおくと，内積を使って $(f, W_{b,\omega})$ とかけることに注意しよう．ω を取り替えて $\mathrm{Re}\, W_{b,\omega}$ を図示したのが図 5.1 である．ω を取り替えることにより，窓の輪郭は変わらないが，振動の数が変わることに注意しよう．パーシバルの等式 (5.1) を使うと，



図 5.1　$\mathrm{Re}\,W_{b,\omega}$ の概形

$$V_{b,\omega}(\xi) := \frac{1}{2\pi}\widehat{W_{b,\omega}}(\xi) = \frac{e^{i\omega b}}{2\pi}\, e^{-i\xi b}\,\widehat{w}(\xi-\omega)$$

とおくとき，

$$(f, W_{b,\omega}) = (\widehat{f}, V_{b,\omega}) \tag{5.2}$$

とかける．次節でみるように，窓関数の選び方によって局所化する点が変わるから，$W_{b,\omega}$ が点 $x=\widetilde{b}$ の近傍に局所化する切落し関数になっているとし，$V_{b,\omega}$ が点 $\xi=\widetilde{\omega}$ の近傍に局所化する切落し関数になっているとすると，等式 (5.2) の意味するところは，ひとつの値 (5.2) が f を点 $x=\widetilde{b}$ の近傍に $W_{b,\omega}$ で局所化したものの積分値と $\widehat{f}$ を点 $\xi=\widetilde{\omega}$ の近傍に $V_{b,\omega}$ で局所化したものの積分値の両方を同時に表しているということである．このように関数 f から f の点 $x=\widetilde{b}$ の近傍における情報と $\widehat{f}$ の点 $\xi=\widetilde{\omega}$ の近傍における情報を取り出すことを f を点 $(x,\xi)=(\widetilde{b},\widetilde{\omega})$ の近傍に**超局所化**するという．これは 10.1 節で述べる時間周波数解析のひとつの数学的表現である．

定義 5.1.3　$w(x)$ を窓関数とする．このとき $\widehat{w}(\xi)$ が窓関数となるなら，f の窓関数 $w(x)$ による窓フーリエ変換を特に**短時間フーリエ変換**という．

5.2　フーリエ解析の不確定性原理

関数 f に対して，集合 $\{x\in\mathbf{R}; f(x)\neq 0\}$ の閉包（境界まで含めた集合）を f の**台**といい，$\mathrm{supp}\,f$ とかく．また，$\mathbf{R}$ における集合が有界かつ閉であるとき，**コンパクト**であるという．ペーリー・ウィナーの定理によれば，関数 f の台がコンパクトなら，つまり $f(x)\neq 0$ となるところが有限の区間に含まれるなら，f のフーリエ像 $\widehat{f}$ は解析関数になるので，恒等的に 0 でない解析関数の零点は孤立していることを考えると，f が恒等的に 0 でない限りは $\widehat{f}$ の台はコンパクトにはなり得ない．切落し関数をかけて局所化するときには，コンパクト台をもつ関数を使うと台の外では 0 となるので，この部分が全く影響しないことがわかり望ましいが，(5.2) のようにひとつの窓関数から作った切落し関数 $W_{b,\omega}$ と $V_{b,\omega}$ で超局所化するときには，両方とも同

時にコンパクト台をもつ関数にすることはできない．そこで関数 $W_{b,\omega}$ と $V_{b,\omega}$ で本質的に切り落とされる部分はどこかということが問題になるが，データ解析でおなじみの標準偏差がひとつの答えになる．

定義 5.2.1　$w(x)$ を窓関数とする．このとき

$$x^* := \frac{1}{||w||^2}\int_{\mathbf{R}} x|w(x)|^2\,dx$$

を $w(x)$ の**中心**，

$$\Delta_w := \frac{1}{||w||}\left(\int_{\mathbf{R}}(x-x^*)^2|w(x)|^2\,dx\right)^{1/2}$$

を $w(x)$ の**幅**という．

$w(x)$ がデータ解析における分布関数のとき，ちょうど x^* が期待値，Δ_w が標準偏差になっているので閉区間 $[x^*-\Delta_w, x^*+\Delta_w]$ が窓関数 $w(x)$ により本質的に切り落とされる部分であるといってよいであろう．関数 $W_{b,\omega}$ の場合には b だけ平行移動されて，$[x^*+b-\Delta_w, x^*+b+\Delta_w]$ となる．また，$\widehat{w}(\xi)$ が窓関数となるなら，$V_{b,\omega}$ により本質的に切り落とされる部分は，$[\omega^*+\omega-\Delta_{\widehat{w}}, \omega^*+\omega+\Delta_{\widehat{w}}]$ である．したがって，5.1 節の $\widetilde{b}, \widetilde{\omega}$ はそれぞれ $\widetilde{b}=x^*+b, \widetilde{\omega}=\omega^*+\omega$ であったことになる．そこで短時間フーリエ変換の場合に，(5.2) によって本質的に切り落とされる部分を (x,ξ)-平面（**相平面**と呼ぶ）で考えた長方形領域

$$[x^*+b-\Delta_w, x^*+b+\Delta_w]\times[\omega^*+\omega-\Delta_{\widehat{w}}, \omega^*+\omega+\Delta_{\widehat{w}}]$$

を x を時間，ξ を周波数とみて，**時間周波数の窓**と呼ぶ．

時間周波数の窓の形は窓関数だけから決まってしまい，(b,ω) を動かしても平行移動するだけである．この面積が小さいほど良い局所化なので，どのように窓関数を選べば時間周波数の窓が小さくなるかが問題となる．これについては次のフーリエ解析の不確定性原理が知られている．証明はたとえば，[4] をみよ．

定理 5.2.1　**（フーリエ解析の不確定性原理）**　$w(x)$ と $\widehat{w}(\xi)$ が窓関数であるとし

$$g_\alpha(x) := \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}\,e^{-x^2/4\alpha} \qquad (\alpha>0)$$

とおく．このとき $\Delta_w\Delta_{\widehat{w}} \geq 1/2$ が成り立ち，等号成立は $w(x)$ が

$$w(x) = c\,e^{iax}\,g_\alpha(x-b) \qquad (c\neq 0,\ a,b\in\mathbf{R})$$

の形のときに限る．

この不確定性原理によれば，どのように窓関数を選んでも時間周波数の窓の面積は 2 より小さくはならず，時間周波数の窓が時間について小さくなるように窓関数を選ぶと，周波数については逆に大きくなってしまうことになる．つまり，時間と周波数について，同時には精度を上げられないということである．

5.3　連続ウェーブレット変換

周期的な運動を考えてみよう．周期的な運動なので少なくとも 1 周期以上観測しなければどのような運動かわからないし，あまり多くの周期について観測すると，ひとつひとつの周期で運動が変わっている場合には，観測結果が平均化されてしまう．つまり，時間周波数の窓を通してこの運動を表す関数をみた場合，高い振動数のところでは時間を短くしないと何周期分もみてしまうし，低い振動数のところでは逆に時間を長くしなと 1 周期分がみられない．このように応用上は時間周波数の窓の面積は変えられなくても，運動に応じて時間周波数の窓の形を変える必要がある．前節で述べたように，時間周波数の窓の形は窓関数だけから決まってしまい，形を変えるには窓関数を替えなければならない．どのように取り替えたらよいのだろうか．そのひとつの答えがここで述べる連続ウェーブレット変換である．

関数 $\psi(x)$ に対し，$C_\psi := \int_{\mathbf{R}} |\widehat{\psi}(\xi)|^2/|\xi|\, d\xi$ とおく．

定義 5.3.1　関数 $\psi(x)$ と $\widehat{\psi}(\xi)$ は窓関数であって，かつ $\psi(x)$ が

$$\int_0^{+\infty} |\widehat{\psi}(\xi)|^2/\xi\, d\xi = \int_0^{+\infty} |\widehat{\psi}(-\xi)|^2/\xi\, d\xi = \frac{1}{2}C_\psi < +\infty$$

を満たすとき，**アナライジングウェーブレット**（解析のためのウェーブレット）と呼ぶ．

関数 ψ がアナライジングウェーブレットのとき，$\widehat{\psi}(\xi)$ は有界連続関数であるから，$C_\psi < +\infty$ が成り立つためには，$\widehat{\psi}(0) = 0$ が成り立つことが必要である．これは，$\int e^{i0x}\,\psi(x)\,dx = \widehat{\psi}(0)$ より，$\int \psi(x)\,dx = 0$（積分平均が 0 という）が必要であることを意味する．この条件はアナライジングウェーブレット ψ が振動している（正の部分と負の部分の面積が同じ）ことを表している．

応用上アナライジングウェーブレットには，数回の微分可能性と急減少性（どんな多項式 $p(x)$ をかけても $\lim_{|x|\to+\infty} |p(x)f(x)| = 0$ が成り立つこと）を要請することが多い．

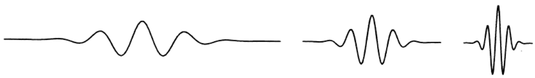


図 5.2　$\psi_a(x)$ の概形

定義 5.3.2　関数 ψ がアナライジングウェーブレットのとき，関数 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ と $a, b \in \mathbf{R}, a > 0$ に対し，次の積分

$$(W_\psi f)(b,a) := \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\,dx \tag{5.3}$$

を**ウェーブレット係数**と呼び，$f(x)$ から $(W_\psi f)(b,a)$ への対応を**ウェーブレット変換**という．また，関数 $f(x) \in L^2(\mathbf{R})$ が連続である点 $x \in \mathbf{R}$ において，次の再構成公式が成り立つ．たとえば，[4] をみよ．

$$f(x) = \frac{2}{C_\psi} \int_0^{+\infty} \left[\int_{\mathbf{R}} (W_\psi f)(b,a) \frac{1}{\sqrt{a}}\, \psi\left(\frac{x-b}{a}\right) db\right] \frac{da}{a^2} \tag{5.4}$$

これを**ウェーブレット逆変換**という．

ウェーブレット変換は，$\psi_a(x) := a^{-1/2}\psi(x/a)$ とおくと，

$$(W_\psi f)(b,a) = \big(f, \psi_a(x-b)\big)$$

とかけるので，ちょうど短時間フーリエ変換で $W_{b,\omega}(x) = \psi_a(x-b)$ つまり $w(x) = e^{-i\omega(x+b)}\psi_a(x)$ とおいた場合になっている．しかしながら，窓関数を周波数によって取り替えたくないので，特に $\omega = 0$ のときを考えると，(5.3) は，$w(x) = \psi_a(x)$ とおいた場合の $(f, W_{b,0})$ であると思い直せる．a を取り替えて $\psi_a(x)$ を図示したのが図 5.2 である．a を取り替えても，振動の数はかわらず形が一定であることに注意しよう．このとき，$\|w\| = \|\psi_a\| = \|\psi_1\|$ が成り立ち，窓関数 $\psi_1 = \psi$ の中心を x^*，幅を Δ_ψ とおくと，窓関数 ψ_a の中心は ax^*，幅が $a\Delta_\psi$ になっている．一方，$\|\widehat{w}\| = \|\widehat{\psi_a}\| = \|\widehat{\psi_1}\|$ が成り立ち，窓関数 $\widehat{\psi}$ の中心を ω^*，幅を $\Delta_{\widehat{\psi}}$ とおくと，窓関数 $\widehat{\psi_a}$ の中心は ω^*/a，幅が $\Delta_{\widehat{\psi}}/a$ になっている．ウェーブレット変換の時間周波数の窓はどうなっているのだろうか．これは，$w(x) = \psi_a(x)$ とおいた場合には

$$(W_\psi f)(b,a) = (f, W_{b,0}) = \big(\widehat{f}, V_{b,0}\big)$$

とかけることから，

$$[b+ax^*-a\Delta_\psi, b+ax^*+a\Delta_\psi]\times\left[\omega^*/a-\Delta_{\widehat{\psi}}/a, \omega^*/a+\Delta_{\widehat{\psi}}/a\right]$$

となる．周波数についてみると，アナライジングウェーブレット ψ を決めれば，窓の幅がパラメータ a だけで決まることに注意しよう．大切なことは，f を時間 $x=b+ax^*$ の近傍に局所化するとき，短時間観測しようとしてパラメータ a を小さくとると，周波数については自動的に広がって高周波が調べられるようになり，逆に，長時間観測しようとしてパラメータ a を大きくとると，周波数については自動的に狭くなり，低周波が調べられるようになるということである．

5.4　一般化されたシャノンの標本定理

実数 $\mathbf{R}$ 上の連続関数 $f(x)$ を考えよう．正数 δ を与えて，$x=k\delta$（$k\in\mathbf{Z}$）ごとの値 $f(k\delta)$ を調べると，数列 $\{f(k\delta)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が得られる．この数列を関数 $f(x)$ の **δ-サンプリング**という．また，δ を**サンプリング間隔**，$x=k\delta$（$k\in\mathbf{Z}$）を**サンプリングポイント**と呼ぶ．信号理論の立場からいうと，関数 $f(x)$ はアナログ信号であり，アナログ信号からサンプリングして，デジタル信号 $\{f(k\delta)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ を作ったことになる．このデジタル信号は何らかの方法で伝達され，またもとのアナログ信号に復元されなければならない．数学的にいえば，

- 与えられた数列 $\{f_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ から，ある連続関数 $f(x)$ を，すべての $k\in\mathbf{Z}$ に対し，$f(k\delta)=f_k$ が成り立つように構成できるか．そして，この関数 $f(x)$ はただひとつに限るか．

という問題になる．一意性が問題になるのは，関数がただひとつに限らなければもとのアナログ信号に復元されたことにならないからである．これはもちろん $f(x)$ が単なる連続関数という条件だけでは不可能である．サンプリングポイントの間では $f(x)$ をどのように結ぼうと自由だからである．このような問題は補間の問題であるといえる．たとえば，ラグランジュの補間公式は，与えられた $n+1$ 個の点を通る n 次関数はひとつに決まり，その n 次関数を与える公式であった．これより，無限個の点が与えられた場合には，整関数（収束半径が無限大のべき級数で表される関数）の範囲では，与えられた点を通る関数がただひとつ存在する可能性がある．この問題に対するひとつの答えが次に述べる一般化されたシャノンの標本定理である．

正数 T に対し,

$$\mathcal{E}_T := \left\{ f \in L^2(\mathbf{R});\ \mathrm{supp}\,\widehat{f} \subset [-T,T] \right\}$$

とおく. 関数 $f \in \mathcal{E}_T$ を閉区間 $[-T,T]$ にバンドリミテッドな関数であるという. ペーリー・ウィナーの定理によれば, このような関数は指数関数の増大度を持つ整関数であることが知られている. シュワルツの急減少関数（すべての導関数がいかなる多項式をかけても無限遠で減少するような関数）の空間を $\mathcal{S}(\mathbf{R})$ で表す.

定義 5.4.1　正数のペア (δ, T) が $0 < \delta < \pi/T$ を満たすとき, **シャノンの条件**を満たすという.

シャノンの条件を満たす (δ, T) に対し,

$$\mathcal{A}_{(\delta,T)} := \left\{ \varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \cap \mathcal{E}_{\pi/\delta};\ \ [-T,T]\ \text{上で}\ \widehat{\varphi} \equiv 1 \right\}$$

とおく.

定理 5.4.1（**一般化されたシャノンの標本定理**）　正数のペア (δ, T) がシャノンの条件を満たし, $\varphi \in \mathcal{A}_{(\delta,T)}$ とする. このとき, すべての $f \in \mathcal{E}_T$ に対し,

$$f(k\delta) = \int_{\mathbf{R}} f(x)\overline{\varphi(x - k\delta)}\,dx \tag{5.5}$$

であって,

$$\begin{aligned} f(x) &= \delta \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} f(k\delta)\varphi(x-k\delta) \\ &= \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} \bigl(f, \sqrt{\delta}\varphi(x-k\delta)\bigr)\sqrt{\delta}\varphi(x-k\delta) \end{aligned} \tag{5.6}$$

が成り立つ.

証明　まず, (5.5) を示そう. 関数 $\widehat{\varphi}(\xi)$ は $\mathrm{supp}\,\widehat{f}$ 上で恒等的に 1 だから, (5.1) より,

$$\begin{aligned} \int f(x)\overline{\varphi(x-k\delta)}\,dx &= \frac{1}{2\pi}\int e^{ik\delta\xi}\,\widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{\varphi}(\xi)}\,d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi}\int e^{ik\delta\xi}\,\widehat{f}(\xi)\,d\xi = f(k\delta). \end{aligned}$$

次に (5.6) を示そう．$\widehat{f}(\xi)$ に対し，周期 $2\pi/\delta$ の関数 $\sum_{k\in\mathbf{Z}}\widehat{f}(\xi+2\pi k/\delta)$ を作る．$\widehat{f}(\xi)=\widehat{\varphi}(\xi)\sum_{k\in\mathbf{Z}}\widehat{f}(\xi+2\pi k/\delta)$ に注意しよう．ポワソンの和公式によれば，関数 $g(\xi)\in L^2(\mathbf{R})$ はコンパクト台をもつとき，

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} g(\xi+2\pi k/\delta)=\frac{\delta}{2\pi}\sum_{n\in\mathbf{Z}}\widehat{g}(n\delta)\,e^{in\delta\xi} \tag{5.7}$$

が成り立つ．たとえば，[17] をみよ．(5.7) で $g=\widehat{f}$ とおく．$\widehat{g}(x)=2\pi f(-x)$ より，

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\widehat{f}(\xi+2\pi k/\delta)=\delta\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(-k\delta)\,e^{ik\delta\xi}=\delta\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(k\delta)\,e^{-ik\delta\xi}$$

よって $\widehat{f}(\xi)=\delta\sum_{n\in\mathbf{Z}} f(k\delta)\widehat{\varphi}(\xi)\,e^{-ik\delta\xi}$ が成り立つ．フーリエ逆変換をすれば，(5.6) である．□

普通のシャノンの標本定理は $\delta=\pi/T$ かつ $\varphi(x)=\mathrm{sinc}\,(x)$ のときである．ここで，関数 $\mathrm{sinc}\,(x):=\sin\pi x/\pi x$ は**カージナルサイン**と呼ばれ，$\mathrm{sinc}\,(x)\notin\mathcal{S}(\mathbf{R})$ である．

ヒルベルト空間（内積 $(\cdot,\cdot)$ が定義された完備なノルム空間）の正規直交基底について少し述べておこう．この本では可算個の元からなる基底をもつヒルベルト空間を単にヒルベルト空間と呼ぶことを注意しておく．$\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とする．ヒルベルト空間の点列 $\{e_j\}_{j\in J}$ に対し，

$$\mathrm{Span}\,\{e_j\}_{j\in J}:=\left\{\sum_{j\in J} a_je_j;\ a_j\in\mathbf{C}\text{ のうち有限個の }a_j\text{ を除き }0\right\}$$

とおく．集合 $\mathrm{Span}\,\{e_j\}_{j\in J}$ の $\mathcal{H}$ における閉包 $\overline{\mathrm{Span}\,\{e_j\}}_{j\in J}$ を単に $\overline{\mathrm{Span}}\,\{e_j\}_{j\in J}$ とかく．$\overline{\mathrm{Span}}\,\{e_j\}_{j\in J}$ は $\mathcal{H}$ の閉部分空間でありヒルベルト空間になる．ヒルベルト空間の点列 $\{e_j\}_{j\in J}$ が $m,n\in J$ に対し，$(e_m,e_n)=\delta_{m,n}$ を満たすとき，**正規直交系**であるという．ここで，$\delta_{m,n}$ は**クロネッカーのデルタ**であり，$m=n$ なら $\delta_{m,n}=1$，$m\neq n$ なら $\delta_{m,n}=0$ である．正規直交系 $\{e_j\}_{j\in J}$ に対し，

$$\overline{\mathrm{Span}}\,\{e_j\}_{j\in J}=\left\{\sum_{j\in J} a_je_j;\ \sum_{j\in J}|a_j|^2<+\infty\right\}$$

であることが知られている．特に，$\overline{\mathrm{Span}}\,\{e_j\}_{j\in J}=\mathcal{H}$ のとき，$\{e_j\}_{j\in J}$ は**正規直交基底**であるといい，$\mathcal{H}$ の任意の元 f は，

$$f=\sum_{j\in J}(f,e_j)\,e_j \tag{5.8}$$

とかける．

(5.6) はあたかも $\{\sqrt{\delta}\varphi(x-k\delta)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ がヒルベルト空間 $\mathcal{E}_T$ （$L^2(\mathbf{R})$ の閉部分空間なので，ヒルベルト空間である）の正規直交基底のようにみえるが，$\varphi \notin \mathcal{E}_T$ であるし（$\varphi \in \mathcal{E}_{\pi/\delta}$ ではある），一般には一次独立ではなく，直交もしない．同様に，$\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ も一般には正規直交系ではない．

正数のペア (δ, T) がシャノンの条件を満たし，$\varphi \in \mathcal{A}_{(\delta,T)}$ とする．このとき，正数のペア $(\delta/2, 2T)$ がシャノンの条件を満たし，$2\varphi(2x) \in \mathcal{A}_{(\delta/2,2T)}$ となることに注意しよう．なぜなら $\mathcal{F}[2\varphi(2x)] = \widehat{\varphi}(\xi/2)$ が成り立つからである．これを繰り返すと，$j \in \mathbf{Z}$ に対し，正数のペア $(\delta/2^j, 2^jT)$ がシャノンの条件を満たし，$2^j\varphi(2^jx) \in \mathcal{A}_{(\delta/2^j,2^jT)}$ となる．たとえば，$(\delta, T) = (1,1)$ はシャノンの条件を満たすから，$\varphi \in \mathcal{A}_{(1,1)}$ を満たす φ をとると，$2^j\varphi(2^jx) \in \mathcal{A}_{(1/2^j,2^j)}$ となる．このとき，(δ, T) を $(1/2^j, 2^j)$，$\varphi(x)$ を $2^j\varphi(2^jx)$ とおくと，(5.6) より，すべての $f \in \mathcal{E}_{2^j}$ に対し，

$$f(x) = \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} \left(f, 2^{j/2}\varphi(2^jx-k)\right) 2^{j/2}\varphi(2^jx-k)$$

が成り立つ．さらに，

$$\mathcal{E}_{2^j} \;\subset\; \overline{\mathrm{Span}}\,\{2^{j/2}\varphi(2^jx-k)\}_{k\in\mathbf{Z}} \;\subset\; \mathcal{E}_{2^j\pi} \;\subset\; \mathcal{E}_{2^{j+2}}$$

が成り立つことに注意しよう．これ以後，次の記号法を使う．関数 f と整数 $j, k \in \mathbf{Z}$ に対し，

$$f_{jk}(x) := 2^{j/2}f(2^jx-k)$$

とかく．このとき，$||f_{jk}|| = ||f||$ が成り立つ．

そこで次のような問題が考えられる．

- うまく関数 φ を選んで，$\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交系にならないか．
- $\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系になるとき，$V_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおくと，

  $$\cdots V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots$$

  かつ，$j \to +\infty$ のとき，$V_j \nearrow L^2(\mathbf{R})$ とならないか．（このとき，j を大きくすると，任意の $L^2(\mathbf{R})$ の元が V_j の元でいくらでも近似できることになる．）
- さらに，j の処理はよくわからないが，$\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ をもとにして，ヒルベルト空間 $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底が構成できないか．

これに対する答えは次の節で与える．

5.5　ウェーブレット展開

フーリエ級数から始めよう．フーリエ級数とは周期関数を同じ周期をもつ正弦波と余弦波の線形結合（一般には無限和）で表そうというものである．したがって，厳密にはほとんどいたるところでしか意味をもたない関数 $F(\xi) \in L^1[0,2\pi]$ に対しても，$F(0) = F(2\pi)$ と思うべきだし，$[0,2\pi]$ の外では周期関数に拡張されていると思うべきである．そこで $[0,2\pi]$ の 0 と 2π をくっつけてしまう（同一視する）ことによってできるものを考える．数学ではこれを**トーラス**と呼び，$\mathbf{T}$ とかく．具体的にはドーナッツの形を思い浮かべるとよい．また，$2^j\mathbf{T}$ とかけば，$1/2^j$ 倍したトーラス，つまり $[0,2\pi/2^j]$ の 0 と $2\pi/2^j$ を同一視したトーラスと思うことにする．

フーリエ級数は収束の意味に注意を払う必要がある．たとえば，$F(\xi) \in L^1(\mathbf{T})$ のフーリエ級数は超関数 $\mathcal{D}'(\mathbf{T})$ の意味で，$F(\xi) = \sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \widehat{F}(\ell)\, e^{i\ell\xi}$ となることが知られている．ここで

$$\widehat{F}(\ell) := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\ell\xi}\, F(\xi)\, d\xi$$

である．たとえば，[30] をみよ．

前節の問題を考えるために，次の補題から始めよう．

補題 5.5.1　関数 $f \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，関数列 $\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系になるのは,（ほとんどいたるところの ξ に対し,）

$$\sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{f}(\xi+2\pi k)|^2 \equiv 1 \tag{5.9}$$

が成り立つとき，かつそのときに限る．

証明　$F(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(\xi+2\pi k)\overline{\widehat{f}(\xi+2\pi k)}$ とおく．$F(\xi) \in L^1(\mathbf{T})$ である．$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ の正規直交性は (5.1) より，任意 $\ell \in \mathbf{Z}$ に対し，

$$\begin{aligned}
\delta_{\ell,0} &= \int_{\mathbf{R}} f(x-\ell)\overline{f(x)}\, dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{-i\ell\xi}\widehat{f}(\xi)\,\overline{\widehat{f}(\xi)}\, d\xi \\
&= \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\ell(\xi+2\pi k)}\,\widehat{f}(\xi+2\pi k)\overline{\widehat{f}(\xi+2\pi k)}\, d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-i\ell\xi}\, F(\xi)\, d\xi = \widehat{F}(\ell)
\end{aligned}$$

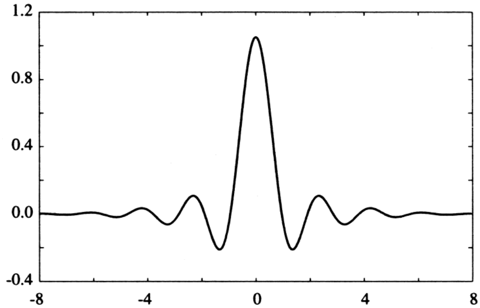


図 5.3　メイエのスケーリング関数

が成り立つことと同値である．フーリエ級数を考えれば，$F(\xi) = \sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \delta_{l,0}\, e^{i\ell\xi} \equiv 1$ と同値である．□

この補題より，φ が条件 (5.9) を満たすように構成できれば，$j \in \mathbf{Z}$ に対し，

$$(\varphi_{jk}, \varphi_{j\ell}) = \big(\varphi(x-k), \varphi(x-\ell)\big) = \delta_{k,\ell}$$

より，1番目の問題に答えることができる．

前節の2番目の問題を考えてみよう．これには，一般化されたシャノンの標本定理がヒントになる．$\widehat{\varphi}$ を実数値関数とする．φ が実数値関数になるように，$\widehat{\varphi}$ を偶関数とする．正数のペア (δ, T) がシャノンの条件を満たすようにうまく選び，φ が $\varphi \in \mathcal{A}_{(\delta,T)}$ と条件 (5.9) を満たすようにしてみよう．

たとえば，次の条件を満たす関数 φ を考えてみよう．

条件 5.5.1　$\widehat{\varphi}$ は $0 \le \widehat{\varphi} \le 1$ を満たす無限回微分可能な実数値の偶関数で，

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} 1 & (-2\pi/3 \le \xi \le 2\pi/3) \\ 0 & (\xi \le -4\pi/3,\quad 4\pi/3 \le \xi) \end{cases}$$

かつ

$$\widehat{\varphi}(\xi)^2 + \widehat{\varphi}(2\pi - \xi)^2 \equiv 1 \qquad (0 \le \xi \le 2\pi) \tag{5.10}$$

を満たす．

この条件 5.5.1 を満たす関数 φ を**メイエのスケーリング関数**と呼ぶ．メイエのスケーリング関数 $\varphi(x)$ のグラフの概形は図 5.3 のようになる．対称軸が $x = 0$ であっ

て，台は無限に広がっているが非常に速く減衰しており，積分すると面積が 1（正の部分と負の部分をキャンセルして）に等しくなることに注意しよう．

関数 φ が条件 5.5.1 を満たすなら，シャノンの条件を満たす $(\delta, T) = (1/2, 2)$ に対し，$\varphi \in \mathcal{A}_{(1/2,2)}$ であって，φ は (5.9) を満たすことに注意しよう．

条件 5.5.1 を満たす φ を作ろう．(5.10) 以外の条件を満たす関数を作ることはたやすい．そのような関数のひとつを φ_0 としよう．このとき，

$$\varphi(x) := \mathcal{F}^{-1}\left[\widehat{\varphi}_0(\xi)/\sqrt{\widehat{\varphi}_0(\xi)^2 + \widehat{\varphi}_0(2\pi - \xi)^2}\,\right]$$

とおけば φ は条件 5.5.1 を満たす．これは 1 番目の問題に対する肯定的答えである．

ここで注意しなければならないのは，一般化されたシャノンの標本定理のときには，関数系が $\{2^{-1/2}\varphi(x - k/2)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ であって，$\{\varphi(x - k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ でないということである．したがって，2 番目の問題の条件が満たされているかどうかを調べる必要がある．

補題 5.5.2　$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交系であるとする．整数 $j \in \mathbf{Z}$ に対し，$\mathcal{V}_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{f_{jk}(x) := 2^{j/2} f(2^j x - k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおく．このとき，$\mathcal{V}_j$ のフーリエ像 $\mathcal{F}\mathcal{V}_j$ は，

$$\mathcal{F}\mathcal{V}_j = \{m(\xi/2^j)\widehat{f}(\xi/2^j);\ \ m(\xi) \in L^2(\mathbf{T})\} \tag{5.11}$$

と特徴づけることができる．これを

$$\mathcal{F}\mathcal{V}_j = L^2(2^{-j}\mathbf{T})\widehat{f}(\xi/2^j) \tag{5.12}$$

と表す．

証明　$g \in \mathcal{V}_j$ なら，$a_k := (g, f_{jk})$ とおくとき，$g = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k f_{jk}$ とかける．前節で述べたように，$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |a_k|^2 < +\infty$ である．これをフーリエ変換してみると，

$$\widehat{g}(\xi) = 2^{-j/2} \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\, \widehat{f}(\xi/2^j)\, e^{-ik\xi/2^j}$$

となるから，$m_g(\xi) := 2^{-j/2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\, e^{-ik\xi}$ とおくと，$m_g(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ であって，

$$\widehat{g}(\xi) = m_g(\xi/2^j)\widehat{f}(\xi/2^j)$$

が成り立つ．逆も同様である．□

補題 5.5.2 によれば，$g, h \in \mathcal{V}_j$ なら，ある関数 $m_g(\xi), m_h(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ があって，$\widehat{g}(\xi) = m_g(\xi/2^j)\widehat{f}(\xi/2^j)$ かつ $\widehat{h}(\xi) = m_h(\xi/2^j)\widehat{f}(\xi/2^j)$ が成り立つ．このとき，次の系が成り立つ．

系 5.5.1

$$(g,h)=\frac{2^j}{2\pi}\int_0^{2\pi} m_g(\xi)\overline{m_h(\xi)}\,d\xi \tag{5.13}$$

証明

$$\begin{aligned}(g,h) &= \frac{1}{2\pi}(\widehat{g},\widehat{h}) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} m_g(\xi/2^j)\overline{m_h(\xi/2^j)}\,|\widehat{f}(\xi/2^j)|^2\,d\xi \\ &= \frac{2^j}{2\pi}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_0^{2\pi} m_g(\xi+2\pi k)\overline{m_h(\xi+2\pi k)}\,|\widehat{f}(\xi+2\pi k)|^2\,d\xi\end{aligned}$$

だから，$m_g(\xi), m_h(\xi)\in L^2(\mathbf{T})$ が周期 2π であることに注意して，補題 5.5.1 を使うとよい．□

等式 (5.13) の右辺はヒルベルト空間 $L^2(\mathbf{T})$ の内積の定数倍になっていることに注意しよう．

補題 5.5.3　関数 φ は条件 5.5.1 を満たすとし，$V_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおく．このとき，$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j=\{0\}$ かつ $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j}=L^2(\mathbf{R})$ が成り立つ．

証明　フーリエ変換がヒルベルト空間 $L^2(\mathbf{R})$ の同型を与えることから，$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}\mathcal{F}V_j=\{0\}$ かつ $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}\mathcal{F}V_j}=L^2(\mathbf{R})$ を示せばよい．

$\bigcap_{j\in\mathbf{Z}}\mathcal{F}V_j=\{0\}$ は (5.12) で $f=\varphi$ とおいた式と

$$\mathrm{supp}\,\widehat{\varphi}(\xi/2^j)\subset[-2^{j+2}\pi/3,\,2^{j+2}\pi/3] \tag{5.14}$$

より，$j\to-\infty$ とすれば明らかである．

$\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}\mathcal{F}V_j}=L^2(\mathbf{R})$ を示そう．任意の閉区間 $[a,b]$ に対し，$[a,b]$ 上で 1，それ以外で 0 となる関数を $\chi_{[a,b]}(\xi)$ とおく．この関数を閉区間 $[a,b]$ の**特性関数**と呼ぶ．特性関数の（有限個の）線形結合を**階段関数**という．$L^2(\mathbf{R})$ の元は階段関数でいくらでも近似できることが知られているから，$\chi_{[a,b]}\in\bigcup_{j\in\mathbf{Z}}\mathcal{F}V_j$ を示せばよい．

自然数 j を $[a/2^j,b/2^j]\subset[-1,1]$ となるように十分大きくとり，関数 $\chi_{[a/2^j,b/2^j]}(\xi)$ を周期 2π の周期関数に拡張した関数を $m(\xi)$ とおく．関数 $\widehat{\varphi}(\xi/2^j)$ は $[-2^j,2^j]$ 上で 1 だから，(5.14) より $\chi_{[a,b]}(\xi)=m(\xi/2^j)\widehat{\varphi}(\xi/2^j)\in\mathcal{F}V_j$ である．□

補題 5.5.4　関数 φ は条件 5.5.1 を満たすとする．このとき，$V_j\subset V_{j+1}$ が成り立つ．

証明　これは，$\widehat{\varphi}(\xi/2^j)\in\mathcal{F}V_{j+1}$ を示せばよい．$\mathrm{supp}\,\widehat{\varphi}(2\xi)\subset[-2\pi/3,2\pi/3]$ より，$\widehat{\varphi}(2\xi)\in L^2[-\pi,\pi]$ だから，$\widehat{\varphi}(2\xi)$ を周期 2π の周期関数に拡張し $m_0(\xi)$ とおく

と，$m_0(\xi) \in C^\infty(\mathbf{T})$ （$\mathbf{T}$ 上無限回微分可能な関数全体の集合）である．(5.14) と $[-2^{j+2}\pi/3, 2^{j+2}\pi/3]$ 上で $\widehat{\varphi}(\xi/2^{j+1}) \equiv 1$ より，$\widehat{\varphi}(\xi/2^j) = m_0(\xi/2^{j+1})\widehat{\varphi}(\xi/2^{j+1}) \in \mathcal{F}V_{j+1}$ である．□

補題 5.5.3 と補題 5.5.4 は 2 番目の問題に対する肯定的答えである．

3 番目の問題であるが，j を整数全体にわたって加え合わせた $\{\varphi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ は $L^2(\mathbf{R}) = \overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j}$ より，$L^2(\mathbf{R})$ の元を表すことができるが，$V_j \subset V_{j+1}$ だから正規直交基底にはなり得ない．そこで，別の関数 $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ で，$\{\psi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系となり，$W_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{\psi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおくとき，$j \neq j'$ に対し，$W_j \cap W_{j'} = \{0\}$ となるようにしたい．このときには，$\{\psi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \{\psi_{j'k'}\}_{k'\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系となるから，$W_j \perp W_{j'}$ であり，

$$\overline{\mathrm{Span}}\Big(\{\psi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \{\psi_{j'k'}\}_{k'\in\mathbf{Z}}\Big)$$

を W_j と $W_{j'}$ の**直交和**と呼び，$W_j \oplus W_{j'}$ とかく．

もし，$V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ となるように ψ が構成できれば，$\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j = V_{j'} \oplus \big(\oplus_{j>j'} W_j\big)$ だから，$j' \to -\infty$ とすれば，補題 5.5.3 より，$V_{j'} \searrow \{0\}$ が成り立つから，$\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \oplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j$ となり，$\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ は $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底となる．

定義 5.5.1　関数 $\psi \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ が $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底となるとき，ψ を**ウェーブレット関数**，または単に**ウェーブレット**という．このとき，$f \in L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底 $\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ に関する展開

$$f = \sum_{j,k\in\mathbf{Z}} (f, \psi_{jk})\, \psi_{jk} \tag{5.15}$$

を**ウェーブレット展開**と呼ぶ．

特に，ψ がアナライジングウェーブレットであれば，$(f, \psi_{jk}) = (W_\psi f)(k/2^j, 1/2^j)$ となり，(5.4) に対応して，

$$f(x) = \sum\nolimits_{j,k\in\mathbf{Z}} (W_\psi f)(k/2^j, 1/2^j)\, 2^{j/2} \psi(2^j x - k) \tag{5.16}$$

が成り立つ．これより，ウェーブレット変換がフーリエ変換に対応すると思えば，(5.16) はフーリエ級数に対応するといえる．このような関数 ψ を構成するには，もう少し考察が必要なので，次の節にゆずろう．

5.6 メイエのウェーブレット

前節で述べたことをもとにして，メイエのウェーブレットの構成法について考えよう．それにはいくつかの補題が必要である．

関数 $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ と $\{g(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ のそれぞれが正規直交系になるとする．さらに，$\mathcal{V}_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{f_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$，$\mathcal{W}_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{g_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおくとき，$\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{V}_1$ を満たすとする．補題 5.5.2 より，ある関数 $m_1(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ があって，

$$\widehat{g}(\xi) = m_1(\xi/2)\widehat{f}(\xi/2) \tag{5.17}$$

とかける．このとき，次の補題が成り立つ．

補題 5.6.1

$$|m_1(\xi)|^2 + |m_1(\xi+\pi)|^2 \equiv 1 \tag{5.18}$$

証明　(5.17) を (5.9) に代入してみよう．k が偶数のときと奇数のときの和にわけて，m_1 が周期 2π の周期関数であることに注意すると，

$$\begin{aligned}
1 &= \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} |m_1(\xi/2+\pi k)\widehat{f}(\xi/2+\pi k)|^2 \\
&= \sum\nolimits_{k'\in\mathbf{Z}} |m_1(\xi/2+2\pi k')|^2 |\widehat{f}(\xi/2+2\pi k')|^2 \\
&\quad + \sum\nolimits_{k''\in\mathbf{Z}} |m_1(\xi/2+\pi+2\pi k'')|^2 |\widehat{f}(\xi/2+\pi+2\pi k'')|^2 \\
&= |m_1(\xi/2)|^2 \sum\nolimits_{k'\in\mathbf{Z}} |\widehat{f}(\xi/2+2\pi k')|^2 \\
&\quad + |m_1(\xi/2+\pi)|^2 \sum\nolimits_{k''\in\mathbf{Z}} |\widehat{f}(\xi/2+\pi+2\pi k'')|^2
\end{aligned}$$

となるから (5.9) を使えばよい．□

特に，$g = f$ のときを考えよう．$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系であって，$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1$ を満たすとする．補題 5.5.2 より，ある関数 $m_0(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ があって，

$$\widehat{f}(\xi) = m_0(\xi/2)\widehat{f}(\xi/2) \tag{5.19}$$

とかける．このとき，次の系が成り立つ．

系 5.6.1

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 \equiv 1 \tag{5.20}$$

この補題と系から $m_1(\xi), m_0(\xi) \in L^\infty(\mathbf{T})$ （$\mathbf{T}$ 上，本質的に有界な関数の集合全体）であることがわかることに注意しよう．

一般に，ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{N}$ に対し，集合 $\{f \in \mathcal{H};$ 任意の $g \in \mathcal{N}$ に対し, $(f,g) = 0\}$ を $\mathcal{N}$ の $\mathcal{H}$ における**直交補空間**といい，$\mathcal{N}^\perp$ とかく．集合 $\mathcal{N}^\perp$ は閉部分空間であることが示せる．

$\mathcal{V}_1$ における $\mathcal{V}_0$ の直交補空間を $\mathcal{V}_0^\perp$ とおく．ウェーブレットを構成するには，$\mathcal{V}_0^\perp$ の構造について考える必要がある．フーリエ変換によってヒルベルト空間の構造は保存されるから，$\mathcal{F}\mathcal{V}_1$ における $\mathcal{F}\mathcal{V}_0$ の直交補空間を考えよう．補題 5.5.2 より，$\mathcal{F}\mathcal{V}_0 = L^2(\mathbf{T})\widehat{f}(\xi)$ である．(5.19) より $\mathcal{F}\mathcal{V}_0 = L^2(\mathbf{T})m_0(\xi/2)\widehat{f}(\xi/2)$ とかける．補題 5.5.2 より，$\mathcal{F}\mathcal{V}_1 = L^2(2^{-1}\mathbf{T})\widehat{f}(\xi/2)$ であることに注意し，系 5.5.1 を使うと，$L^2(2^{-1}\mathbf{T})\widehat{f}(\xi/2)$ と $L^2(2^{-1}\mathbf{T})$ が同型であることが示せる．したがって，$L^2(\mathbf{T})m_0(\xi/2)$ の $L^2(2^{-1}\mathbf{T})$ における直交補空間を $\widetilde{\mathcal{V}}_0^\perp$ とおき，この空間の構造を調べればよいことになる．

整数 $j \in \mathbf{Z}$ に対し，自然な対応 $L^2(\mathbf{T}) \ni \ell(\xi) \mapsto \ell(2^{-j}\xi) \in L^2(2^{-j}\mathbf{T})$ により，$L^2(\mathbf{T})$ と $L^2(2^{-j}\mathbf{T})$ とはヒルベルト空間として同型になるから，任意の $\widetilde{\ell}(\xi) \in L^2(2^{-j}\mathbf{T})$ に対し，ある $\ell(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ があって，$\widetilde{\ell}(\xi) = \ell(2^{-j}\xi)$ が成り立つことを注意しておく．この自然な対応がトーラス $2^j\mathbf{T}$ を $[0, 2\pi/2^j]$ の 0 と $2\pi/2^j$ を同一視したトーラスと思うひとつの理由である．

補題 5.6.2 $\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系であって，$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1$ を満たすとする．このとき，

$$\widetilde{\mathcal{V}}_0^\perp = \left\{\ell(\xi/2) \in L^2(2^{-1}\mathbf{T});\ m_0(\xi)\overline{\ell(\xi)} + m_0(\xi+\pi)\overline{\ell(\xi+\pi)} \equiv 0\right\} \tag{5.21}$$

が成り立つ．

証明 関数の周期性に注目すると，$\ell(\xi/2) \in \widetilde{\mathcal{V}}_0^\perp$ は，任意の $n(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ に対し，

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^{4\pi} n(\xi)m_0(\xi/2)\overline{\ell(\xi/2)}\,d\xi = 2\int_0^{2\pi} n(2\xi')m_0(\xi')\overline{\ell(\xi')}\,d\xi' \\ &= 2\int_0^{\pi} n(2\xi')\{m_0(\xi')\overline{\ell(\xi')} + m_0(\xi'+\pi)\overline{\ell(\xi'+\pi)}\,\}\,d\xi' \end{aligned} \tag{5.22}$$

と同値である．さらに，$m_0(\xi')\overline{\ell(\xi')} + m_0(\xi'+\pi)\overline{\ell(\xi'+\pi)} \in L^2(2\mathbf{T})$ であって，$n(2\xi')$ は $L^2(2\mathbf{T})$ の任意の元であることに注意すると，(5.22) は $L^2(2\mathbf{T})$ の意味で，$m_0(\xi')\overline{\ell(\xi')} + m_0(\xi'+\pi)\overline{\ell(\xi'+\pi)} \equiv 0$ が成り立つことと同値である．□

補題 5.6.3　関数 $f, g \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ と $\{g(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ のそれぞれが正規直交系であるとする．さらに，$\mathcal{V}_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{f_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$，$\mathcal{W}_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{g_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおくとき，$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1$ を満たし，$g \in \mathcal{V}_0^\perp$ であるとする．このとき，$\mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0^\perp$ が成り立つ．

証明　$\mathcal{W}_0 \subset \mathcal{V}_0^\perp$ は明らかである．補題 5.5.2 により，任意の関数 $h \in \mathcal{V}_0^\perp$ に対し，ある関数 $\ell(\xi/2) \in \widetilde{\mathcal{V}}_0^\perp$ があって，$\widehat{h}(\xi) = \ell(\xi/2)\widehat{f}(\xi/2)$ が成り立つ．$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1$ だから (5.17) を満たす $m_1(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ が存在する．$m_1, \ell \in \widetilde{\mathcal{V}}_0^\perp$ だから (5.21) より，$\big(m_1(\xi), m_1(\xi+\pi)\big)$ と $\big(\ell(\xi), \ell(\xi+\pi)\big)$ は平行，つまり，ある関数 $n(\xi)$ があって，$\ell(\xi) = n(\xi)m_1(\xi)$ かつ $\ell(\xi+\pi) = n(\xi)m_1(\xi+\pi)$ が成り立つ．これより，$n(\xi)$ は周期 π の関数であるとしてよい．(5.18) を使って，$||\ell||_{L^2(\mathbf{T})} = ||n||_{L^2(2\mathbf{T})}$ が示せるので，$n(\xi) \in L^2(\mathbf{T})$ である．よって，$n(\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k\, e^{-2ik\xi} \in L^2(2\mathbf{T})$ とかけることがわかる．

$$
\begin{aligned}
h(x) &= \mathcal{F}^{-1}\Big[n(\xi/2)m_1(\xi/2)\widehat{f}(\xi/2)\Big] \\
&= \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k \mathcal{F}^{-1}\Big[\widehat{g}(\xi)\, e^{-ik\xi}\Big] \;=\; \sum_{k\in\mathbf{Z}} a_k g(x-k) \in \mathcal{W}_0
\end{aligned}
$$

したがって，$\mathcal{V}_0^\perp \subset \mathcal{W}_0$ が成り立つ．□

補題 5.6.3 の証明から，$\mathcal{V}_0^\perp$ がただひとつの関数 g の整数の平行移動だけで表現できる理由を関係式 (5.21) によって定義される $\mathbf{C}^2$ の部分ベクトル空間（原点を通る直線）：$\Big\{(z,w) \in \mathbf{C}^2;\; m_0(\xi)z + m_0(\xi+\pi)w = 0\Big\}$ の次元（1 次元）にあるとみることができる．このような考え方は多次元ウェーブレットに有効である．n 次元ウェーブレットは $2^n - 1$ 個のウェーブレット関数を必要とすることが知られている．たとえば [22] をみよ．

補題 5.6.4　$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \{g(x-k')\}_{k'\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系になるのは，

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{f}(\xi+2\pi k)|^2 \equiv \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{g}(\xi+2\pi k)|^2 \equiv 1 \tag{5.23}$$

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(\xi+2\pi k)\overline{\widehat{g}(\xi+2\pi k)} \equiv 0 \tag{5.24}$$

が成り立つとき，かつそのときに限る．

証明　補題 5.5.1 によれば，$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ と $\{g(x-k')\}_{k'\in\mathbf{Z}}$ のそれぞれが正規直交系になる条件は，(5.23) である．そこで，$f(x-\ell)$（$\ell \in \mathbf{Z}$）と $g(x)$ の直交性と同

値な条件を調べよう．$H(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} \widehat{f}(\xi+2\pi k)\overline{\widehat{g}(\xi+2\pi k)}$ とおく．$H(\xi) \in L^1(\mathbf{T})$ よりそのフーリエ級数は超関数 $\mathcal{D}'(\mathbf{T})$ の意味で，$H(\xi) = \sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \widehat{H}(\ell)\, e^{i\ell\xi}$ とかけて，

$$\widehat{H}(\ell) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbf{R}} e^{-i\xi\ell}\, \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{g}(\xi)}\, d\xi = \int_{\mathbf{R}} f(x-\ell)\overline{g(x)}\, dx$$

であることに注意すれば，補題 5.5.1 と同様に，求める条件は (5.24) であることがわかる．□

補題 5.6.5　$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系であって，$\mathcal{V}_0 \subset \mathcal{V}_1$ を満たし，$g \in \mathcal{V}_0^{\perp}$ とする．このとき，$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \{g(x-k')\}_{k'\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系になる条件は，行列

$$M(\xi) := \begin{pmatrix} m_0(\xi) & m_1(\xi) \\ m_0(\xi+\pi) & m_1(\xi+\pi) \end{pmatrix}$$

がすべての（ほとんどいたるところの）ξ に対し，ユニタリ行列になることである．

証明　(5.17) と (5.19) を (5.24) に代入してみよう．k が偶数のときと奇数のときの和にわけて，m_0 と m_1 が周期 2π の周期関数であることに注意すると，

$$\begin{aligned}
&\sum_{k\in\mathbf{Z}} m_0(\xi/2+\pi k)\widehat{f}(\xi/2+\pi k)\overline{m_1(\xi/2+\pi k)\widehat{f}(\xi/2+\pi k)} \\
=\ &\sum_{k'\in\mathbf{Z}} m_0(\xi/2+2\pi k')\overline{m_1(\xi/2+2\pi k')}\,|\widehat{f}(\xi/2+2\pi k')|^2 \\
&+\sum_{k''\in\mathbf{Z}} m_0(\xi/2+\pi+2\pi k'')\overline{m_1(\xi/2+\pi+2\pi k'')} \\
&\qquad\qquad \times |\widehat{f}(\xi/2+\pi+2\pi k'')|^2 \\
=\ &m_0(\xi/2)\overline{m_1(\xi/2)}\sum_{k'\in\mathbf{Z}} |\widehat{f}(\xi/2+2\pi k')|^2 \\
&+m_0(\xi/2+\pi)\overline{m_1(\xi/2+\pi)}\sum_{k''\in\mathbf{Z}} |\widehat{f}(\xi/2+\pi+2\pi k'')|^2
\end{aligned}$$

となるから (5.23) を使うと，

$$m_0(\xi/2)\overline{m_1(\xi/2)} + m_0(\xi/2+\pi)\overline{m_1(\xi/2+\pi)} \equiv 0$$

を得る．この式と (5.18) と (5.20) は行列 $M(\xi)$ がすべての ξ に対し，ユニタリ行列になることを意味する．逆も，仮定から (5.23) と (5.24) とが成り立つので明らかであろう．□

メイエのウェーブレットの構成法を述べよう．

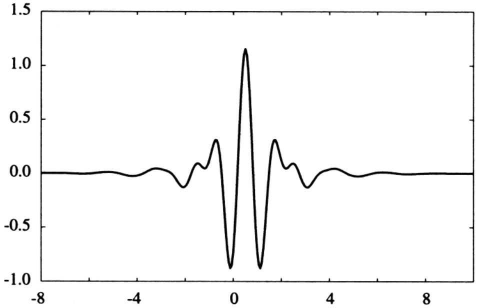


図 5.4 メイエのウェーブレット

定理 5.6.1（メイエのウェーブレット） 関数 φ は条件 5.5.1 を満たすとする．このとき，

$$\psi(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-i\xi/2}\,\overline{m_0(\xi/2+\pi)}\,\widehat{\varphi}(\xi/2)\right] \tag{5.25}$$

はウェーブレットである．

証明 残された問題は $m_1(\xi)$ を行列 $M(\xi)$ がすべての ξ に対し，ユニタリ行列になるように選ぶことであるが，たとえば，$m_1(\xi) := e^{-i\xi}\,\overline{m_0(\xi+\pi)}$ とすればよい．このとき，$m_1 \in C^\infty(\mathbf{T})$ であるから，$\widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ に注意すると，$\widehat{\psi} \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ したがって，$\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \subset L^2(\mathbf{R})$ となる．補題 5.5.4 より，$V_0 \subset V_1$ であり，$f = \varphi$ とおき，補題 5.6.2 を使えば，(5.25) から $\psi \in V_0^\perp$ である．$g = \psi$ とおき，補題 5.6.5 を使えば，$\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \{\psi(x-k')\}_{k'\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系になって，補題 5.6.3 より $V_1 = V_0 \oplus W_0$，したがって $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ となる．補題 5.5.3 を使って，$\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \oplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j$ となることに注意すると，$\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ は $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底となる．□

メイエのウェーブレット $\psi(x)$ のグラフの概形は図 5.4 のようになる．対称軸が $x = 1/2$ であって，台は無限に広がっているが非常に速く減衰しており，積分すると正の部分と負の部分の面積が等しくなるように振動していることに注意しよう．

この構成法からわかることは，関数 $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ を $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+2\pi k)|^2 \equiv 1$ を満たし，かつ $V_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおいたとき，$\cap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$, $\overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$, $V_j \subset V_{j+1}$ を満たすように構成できれば，ψ は上に述べたような一般的方法で構成できるということである．これについては 7 章で述べよう．

第 6 章

多重解像度解析

6.1 多重解像度解析の定義

フーリエ級数展開とウェーブレット展開の違いのひとつに，フーリエ級数展開は使う関数が指数関数だけであるが，ウェーブレット展開の場合は，いろいろなウェーブレットが構成できて，考える問題に応じて，ウェーブレットを適当に選んで使うことができるという違いがある．この章では，前の章で述べたウェーブレットの構成法を一般化して，いろいろなウェーブレットを構成する統一的な方法を説明する．

定義 6.1.1 次の条件を満たす $L^2(\mathbf{R})$ の閉部分空間の列 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ を**多重解像度解析**と呼ぶ．

(a) $\cdots \subset V_{j-1} \subset V_j \subset V_{j+1} \subset \cdots$（ $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ は**増大列**であるという．）

(b) $\bigcap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$

(c) $\overline{\bigcup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$

(d) $f(x) \in V_j \iff f(2x) \in V_{j+1}$

(e) ある関数 $\varphi(x) \in V_0$ が存在して，$\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は V_0 の正規直交基底となる．

整数 j を**スケール**といい，関数 φ を**スケーリング関数**と呼ぶ．

(e) より，

$$f(x) \in V_0 \iff \text{すべての } k \in \mathbf{Z} \text{ に対し，} f(x-k) \in V_0$$

であり，(d) と (e) より，$V_j = \overline{\mathrm{Span}}\,\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が成り立つことに注意しよう．

[13] などのように，$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ が j に関して，増大列ではなく減少列になっている場合もあることに注意しよう．この場合には，f_{jk} の定義を変える必要がある．また，(e) のかわりに

(f) 関数 $g(x)\in V_0$ が存在して，$\{g(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は V_0 のリース基底となる．

という定義が使われる場合がある．ここで，V_0 の関数列 $\{g(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が**リース基底**であるとは，正数 c_1 と c_2 が存在して，すべての ℓ^2-列 $\{\alpha_k\}$ に対し，(つまり，$\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\alpha_k|^2<+\infty$ が成り立つような $\{\alpha_k\}$ ということ)

$$c_1\Bigl(\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\alpha_k|^2\Bigr)^{1/2}\le\Bigl\|\sum_{k\in\mathbf{Z}}\alpha_k g(x-k)\Bigr\|_{V_0}\le c_2\Bigl(\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\alpha_k|^2\Bigr)^{1/2}$$

が成り立つときをいう．[22] では，与えられたリース基底 $\{g(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ に対し，正規直交基底 $\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ を

$$\widehat{\varphi}(\xi):=\widehat{g}(\xi)\Big/\Bigl(\sum_{k\in\mathbf{Z}}|\widehat{g}(\xi+2\pi k)|^2\Bigr)^{1/2} \tag{6.1}$$

とおくことによって構成できることを述べている．また，[22] では別の関数 $\phi(x)\in V_0$ が存在して，$\{\phi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が V_0 の正規直交基底であるとすると，$|\theta(\xi)|\equiv 1$ を満たす周期 2π の関数 $\theta(\xi)\in L^\infty(\mathbf{T})$ があって，$\widehat{\varphi}(\xi)=\theta(\xi)\widehat{\phi}(\xi)$ が成り立つことが述べられているので，ある意味で多重解像度解析 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ に対し，スケーリング関数 φ はひとつに決まるといってよい．このことより，$\left|\int_{\mathbf{R}}\varphi(x)\,dx\right|=1$ なら，$\theta(\xi)\in L^\infty(\mathbf{T})$ をうまく選ぶと，$\int_{\mathbf{R}}\varphi(x)\,dx=1$ が成り立つようにできる．

5 章でみたように，応用上ウェーブレットは無限遠で速く減少していることが望ましい．そのひとつの枠組みとして，次の関数を考えよう．関数 $f(x)\in L^1(\mathbf{R})$ が，任意の正数 N に対し，ある正数 C_N があって，(ほとんどいたるところの x に対し，)

$$|f(x)|\le C_N(1+|x|)^{-N} \tag{6.2}$$

を満たすとき，**無限遠で急減少**であるという．$\mathbf{R}_+:=\{x\in\mathbf{R};\ x\ge 0\}$ とおく．非負の実数 $s\in\mathbf{R}_+$ に対し，**ソボレフ空間**を

$$H^s(\mathbf{R}):=\Bigl\{f\in L^2(\mathbf{R});\ \int_{\mathbf{R}}(1+|\xi|)^{2s}|\widehat{f}(\xi)|^2\,d\xi<+\infty\Bigr\}$$

で定義する．$\mathbf{Z}_+ := \{x \in \mathbf{Z};\ x \geq 0\}$ とおく．また，$\alpha \in \mathbf{Z}_+$ に対し，f の α 次導関数を $f^{(\alpha)}$ とかく．非負の整数 $r \in \mathbf{Z}_+$ に対し，

$$\mathcal{B}^r(\mathbf{R}) := \left\{ f(x) \in C^r(\mathbf{R});\ \sup_{x\in\mathbf{R}} |f^{(\alpha)}(x)| < +\infty,\ 0 \leq \alpha \leq r \right\}$$

とする．このとき，f が無限遠で急減少なら，$\widehat{f} \in \cap_{s\in\mathbf{R}_+} H^s(\mathbf{R})$ である．ソボレフの埋込み定理によれば，$s > r + 1/2$ ならば，$H^s(\mathbf{R}) \subset \mathcal{B}^r(\mathbf{R})$ が成り立つので，$\widehat{f} \in \mathcal{B}^\infty(\mathbf{R})$ である．たとえば，[16] をみよ．

6.2 スケーリング関数

スケーリング関数 φ は多重解像度解析に付随して与えられ，$\varphi_{jk} := 2^{j/2}\varphi(2^j x - k)$ とおくとき，$V_j = \overline{\mathrm{Span}}\,\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ となるが，逆に関数 φ から多重解像度解析を構成することを考えてみよう．

関数 φ が無限遠で急減少であって，$\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は正規直交系であるとしよう．このとき，

- $V_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおくと，$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ は多重解像度解析になるのだろうか．

(d) と (e) は明らかである．残りの条件については，次に述べるいくつかの補題で明らかにしよう．

補題 6.2.1 (a) $\iff$ ある関数 $m_0(\xi) \in C^\infty(\mathbf{T})$ があって，$\widehat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)$ が成り立つ．

証明 $(\Rightarrow)$ は，$V_{-1} \subset V_0$ より，$\varphi(x/2) \in V_{-1}$ は，$\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ で展開できるので，

$$2^{-1}\varphi(x/2) = \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} h_k \varphi(x-k) \tag{6.3}$$

とかける．ここで，$h_k := 2^{-1}\int \varphi(x/2)\overline{\varphi(x-k)}\,dx$ である．(6.3) をフーリエ変換し，$m_0(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k\, e^{-ik\xi}$ とおけば，$\widehat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)$ が成り立つ．$m_0(\xi) \in C^\infty(\mathbf{T})$ を示せばよい．φ が無限遠で急減少だから，(6.2) が成り立つ．不等式

$$1/(1+|x-y|) \leq (1+|x|)/(1+|y|) \tag{6.4}$$

で $y = k$ とおき，$1/(1+|x/2|) \leq 2/(1+|x|)$ を使うと，

$$|h_k| \leq \frac{2^{N+1}C_N C_{N+2}}{(1+|k|)^N} \int \frac{1}{(1+|x|)^2}\,dx$$

が成り立つ．すなわち，任意の正数 M に対し，ある正数 C_M があって，$|h_k| \leq C_M(1+|k|)^{-M}$ が成り立つ．これを，フーリエ係数が**無限遠で急減少**であるという．このとき，$m_0(\xi)$ は何回でも項別に微分可能となり，$m_0(\xi) \in C^\infty(\mathbf{T})$ である．

($\Leftarrow$) は，(6.3) が成り立つことになり，$k \in \mathbf{Z}$ に対し，$\varphi_{-1,k} \in V_0$ が示せるので明らかであろう．□

一般に，ヒルベルト空間からヒルベルト空間への写像を**作用素**と呼ぶ．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の部分集合 $\mathcal{D}$ が $\mathcal{H}$ の**稠密な集合**であるとは，$\mathcal{H}$ の元が $\mathcal{D}$ の元でいくらでも近似できるときをいう．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の稠密な集合 $\mathcal{D}$ 上で定義された線形作用素 A に対し，$||A|| := \sup_{||f||=1, f\in\mathcal{D}} ||Af||$ を**作用素ノルム**と呼び，$||A|| < +\infty$ のとき，A は**有界作用素**であるという．線形作用素に対しては，有界であることと連続であることは同値であることに注意しよう．$\mathcal{H}$ の稠密な集合 $\mathcal{D}$ 上で定義された有界作用素は連続性を使って，$\mathcal{H}$ 全体で定義された有界作用素に一意的に拡張できる．したがって，有界作用素は $\mathcal{H}$ 全体で定義されていると思うのが普通である．ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間を $\mathcal{N}$ とする．$\mathcal{N}$ には正規直交基底が存在するから，そのひとつを $\{e_i\}_{i\in I}$ とする．また，$\mathcal{N}$ の直交補空間を $\mathcal{N}^\perp$ とおくと，$\mathcal{N}^\perp$ にも正規直交基底が存在するから，そのひとつを $\{e_j^\perp\}_{j\in J}$ とする．このとき，$\{e_i\}_{i\in I} \cup \{e_j^\perp\}_{j\in J}$ は $\mathcal{H}$ の正規直交基底になるから，$f \in \mathcal{H}$ は $f = \sum_{i\in I} (f, e_i)\, e_i + \sum_{j\in J} (f, e_j^\perp)\, e_j^\perp$ とかける．$\mathcal{N}$ の正規直交基底の線形結合の部分 $\sum_{i\in I} (f, e_i)\, e_i$ を $P_\mathcal{N} f$ とかこう．$P_\mathcal{N} f \in \mathcal{N}$ を $f \in \mathcal{H}$ の $\mathcal{N}$ 上への**直交射影**，作用素 $P_\mathcal{N}$ を $\mathcal{N}$ 上への**射影作用素**と呼ぶ．このとき，$\mathcal{N} = P_\mathcal{N}\mathcal{H}$ とかける．$P_\mathcal{N}$ が正規直交基底のとり方によらないことは明らかであろう．本来は正規直交基底を使わないで定義されることを注意しておこう．

$L^2(\mathbf{R})$ の閉部分空間 V_j 上への射影作用素を P_j とかく．このとき，$f \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$P_j f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (f, \varphi_{jk})\, \varphi_{jk}$ である．$P_j f$ は f を V_j の元で近似したものであると思ってよい．

補題 6.2.2　(b) はつねに成り立つ．

証明　(b) を示すには，任意の $f \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$\lim_{j\to-\infty} ||P_j f - 0|| = 0$ が成り立つことをいえばよいが，射影作用素は $||P_j|| = 1$ を満たすから，f が $L^2(\mathbf{R})$ の稠密な集合 D に属するときを考えれば十分である．実際，任意 $\varepsilon > 0$ に対し，ある $g \in D$ があって，$||f-g|| < \varepsilon$ が成り立つから，$||P_j f|| \leq ||P_j||\, ||f-g|| + ||P_j g|| \leq \varepsilon + ||P_j g||$ となり，$\lim_{j\to-\infty} ||P_j g|| = 0$ より，$\lim_{j\to-\infty} ||P_j f|| = 0$ が従うからである．

特に，階段関数の集合は $L^2(\mathbf{R})$ の稠密な集合であり，階段関数は閉区間の特性関数の有限個の線形結合で表せるから，任意の閉区間 $[a,b]$ の特性関数 $\chi_{[a,b]}$ について，

$\lim_{j\to-\infty}||P_j\chi_{[a,b]}||=0$ を示せばよい．パーシバルの等式とシュワルツの不等式より，

$$\begin{aligned}||P_j\chi_{[a,b]}||^2 &= \sum_{k\in\mathbf{Z}}|(\chi_{[a,b]},\varphi_{jk})|^2\\ &= 2^j\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\int_a^b\overline{\varphi(2^jx-k)}\,dx\right|^2\\ &= 2^{-j}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\left|\int_{2^ja}^{2^jb}\overline{\varphi(x-k)}\,dx\right|^2\\ &\le (b-a)\sum_{k\in\mathbf{Z}}\int_{2^ja}^{2^jb}|\varphi(x-k)|^2\,dx\\ &= (b-a)\int_{\mathbf{R}}\sum_{k\in\mathbf{Z}}\chi_{[2^ja+k,2^jb+k]}(x)|\varphi(x)|^2\,dx\end{aligned}$$

が成り立つ．$j\to-\infty$ のとき，区間 $[2^ja+k,2^jb+k]$ は交わりをもたなくなるから，$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\chi_{[2^ja+k,2^jb+k]}(x)|\varphi(x)|^2\le|\varphi(x)|^2\in L^1(\mathbf{R})$ が成り立ち，ルベーグの収束定理により，極限を積分記号の中にいれてもよい．ほとんどいたるところの $x\in\mathbf{R}$ に対し，$\sum_{k\in\mathbf{Z}}\chi_{[2^ja+k,2^jb+k]}(x)|\varphi(x)|^2\to0$ であるから，$\lim_{j\to-\infty}||P_j\chi_{[a,b]}||=0$ が成り立つ．□

この補題の証明には φ が急減少であることは使っていないことに注意しよう．

パーシバルの等式 (5.1) によりフーリエ変換は定数倍を調節すると，$L^2(\mathbf{R})$ 上のユニタリ作用素（内積を保存する上への同型写像）であることに注意しよう．$L^2(\mathbf{R})$ の閉部分空間 $\mathcal{F}V_j$ 上への射影作用素を $\mathcal{P}_j$ とかくと，$\mathcal{P}_j=\mathcal{F}P_j\mathcal{F}^{-1}$ である．

補題 6.2.3

$$\mathcal{P}_j\widehat{f}(\xi)=\widehat{\varphi}(\xi/2^j)\sum_{k\in\mathbf{Z}}\overline{\widehat{\varphi}(\xi/2^j-2\pi k)}\,\widehat{f}(\xi-2^j2\pi k) \tag{6.5}$$

である．

証明 パーシバルの等式 (5.1) により，$f\in L^2(\mathbf{R})$ に対し，

$$\mathcal{F}P_jf=\sum_{k\in\mathbf{Z}}(f,\varphi_{jk})\,\widehat{\varphi_{jk}}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\frac{1}{2\pi}\left(\widehat{f},\widehat{\varphi_{jk}}\right)\widehat{\varphi_{jk}}$$

である．コンパクト台をもつ無限回微分可能な $\mathbf{R}$ 上の関数全体の集合を $C_0^\infty(\mathbf{R})$ とかく．$\widehat{f}\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ として，超関数 $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ の意味で変形しよう．φ が急減少であるから $\widehat{\varphi}\in C^\infty(\mathbf{R})$ であり，

$$\widehat{\varphi_{jk}}(\xi)=2^{-j/2}\widehat{\varphi}(\xi/2^j)\,e^{-ik\xi/2^j}$$

が成り立つことに注意する．超関数の意味では無限和と積分（内積）の順序を交換して計算することができるから，

$$\mathcal{F}P_j f(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi/2^j) \int_{\mathbf{R}} \frac{1}{2^j 2\pi} \sum_{k\in\mathbf{Z}} e^{ik(\eta-\xi)/2^j}\, \overline{\widehat{\varphi}(\eta/2^j)}\, \widehat{f}(\eta)\, d\eta$$

となる．ポワソンの和公式 (5.7) は，$g(\xi)$ がコンパクト台をもつ超関数についても成り立つことが知られているから，g をディラックのデルタ関数 δ，サンプリング間隔の δ を $1/2^j$，ξ を $\eta-\xi$ とおけば，$\mathcal{F}[\delta]=1$ より，

$$\frac{1}{2^j 2\pi} \sum_{k\in\mathbf{Z}} e^{ik(\eta-\xi)/2^j} = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \delta(\eta-\xi+2^j 2\pi k)$$

を得る．一般に，$\int \delta(\eta-\xi)h(\eta)\,d\eta = h(\xi)$ であるから，$\mathcal{F}P_j f = \mathcal{F}P_j\mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}f = \mathcal{P}_j\widehat{f}$ に注意すると，$\widehat{f}\in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対し，(6.5) が成り立つ．

$f\in L^2(\mathbf{R})$ に対し，(6.5) が成り立つことを示すには，(6.5) の右辺が $L^2(\mathbf{R})$ の稠密な集合 $C_0^\infty(\mathbf{R})$ で定義された有界作用素であることをいえばよい．なぜなら $C_0^\infty(\mathbf{R})$ は $L^2(\mathbf{R})$ で稠密であるから，(6.5) の右辺が $L^2(\mathbf{R})$ の射影作用素に一意的に拡張されるからである．$F(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{f}(\xi-2^j 2\pi k)|^2$ とおくと，$F\in L^1(2^{-j}\mathbf{T})$ である．$\Phi_f(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} \overline{\widehat{\varphi}(\xi/2^j-2\pi k)}\,\widehat{f}(\xi-2^j 2\pi k)$ とおく．シュワルツの不等式と補題 5.5.1 より，$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+2\pi k)|^2 \equiv 1$ が成り立つことを使うと，

$$\begin{aligned} |\Phi_f(\xi)| &\le \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi/2^j-2\pi k)|\,|\widehat{f}(\xi-2^j 2\pi k)| \\ &\le F(\xi)^{1/2}\Big(\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi/2^j-2\pi k)|^2\Big)^{1/2} = F(\xi)^{1/2} \end{aligned} \tag{6.6}$$

であるから，$\Phi_f\in L^2(2^{-j}\mathbf{T})$ である．ベッポ・レビの定理により無限和と積分の順序を交換して，F が周期 $2^j 2\pi$ の関数であることを使うと，

$$\begin{aligned} \|\mathcal{P}_j\widehat{f}\|^2 &\le \int_{\mathbf{R}} |\widehat{\varphi}(\xi/2^j)|^2 F(\xi)\,d\xi \\ &= \sum_{k\in\mathbf{Z}} \int_0^{2^j 2\pi} |\widehat{\varphi}(\xi/2^j+2\pi k)|^2 F(\xi+2^j 2\pi k)\,d\xi \\ &= \int_0^{2^j 2\pi} F(\xi) \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi/2^j+2\pi k)|^2\,d\xi \\ &= \int_0^{2^j 2\pi} F(\xi)\,d\xi \;=\; \|\widehat{f}\|^2 \end{aligned}$$

となるから，$\|\mathcal{P}_j\|\le 1$ である．□

系 6.2.1　$\widehat{f} \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ とする．このとき，$\widehat{f}$ に対し，ある $j_0 \in \mathbf{N}$ があって，$j \geq j_0$ なら，

$$||\mathcal{P}_j \widehat{f}\,||^2 = \int_{\mathbf{R}} |\widehat{\varphi}(\xi/2^j)|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \tag{6.7}$$

が成り立つ．

証明　$j_0 \in \mathbf{N}$ を十分大きくとると，$j \geq j_0$ なら，$k, \ell \in \mathbf{Z}$ に対し，

$$\widehat{f}(\xi + 2^j 2\pi\ell)\overline{\widehat{f}(\xi + 2^j 2\pi k)} = \delta_{k,\ell} |\widehat{f}(\xi + 2^j 2\pi k)|^2$$

が成り立つから，

$$|\Phi_f(\xi)|^2 = \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi/2^j + 2\pi k)|^2 |\widehat{f}(\xi + 2^j 2\pi k)|^2$$

である．このとき，射影作用素の性質：$\mathcal{P}_j^2 = \mathcal{P}_j$, $\mathcal{P}_j^* = \mathcal{P}_j$ を使い，(6.6) よりルベーグの収束定理が使えて無限和と積分の順序を交換すると，

$$\begin{aligned}
||\mathcal{P}_j \widehat{f}\,||^2 &= (\mathcal{P}_j \widehat{f}, \widehat{f}\,) \\
&= \int_{\mathbf{R}} \widehat{\varphi}(\xi/2^j)\overline{\widehat{f}(\xi)}\, \Phi_f(\xi)\, d\xi \\
&= \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} \int_0^{2^j 2\pi} \widehat{\varphi}(\xi/2^j + 2\pi k)\overline{\widehat{f}(\xi + 2^j 2\pi k)}\, \Phi_f(\xi + 2^j 2\pi k)\, d\xi \\
&= \int_0^{2^j 2\pi} \Phi_f(\xi) \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} \widehat{\varphi}(\xi/2^j + 2\pi k)\overline{\widehat{f}(\xi + 2^j 2\pi k)}\, d\xi \\
&= \int_0^{2^j 2\pi} |\Phi_f(\xi)|^2\, d\xi \;=\; \int |\widehat{\varphi}(\xi/2^j)|^2 |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi
\end{aligned}$$

となる．□

補題 6.2.4　(c) $\iff$ $|\widehat{\varphi}(0)| = \left|\int \varphi(x)\, dx\right| = 1$

証明　フーリエ変換はユニタリ作用素の定数倍であることより，

$$\text{(c)} \iff \text{任意の}\,\widehat{g} \in L^2(\mathbf{R})\,\text{に対し，}\lim_{j\to+\infty} ||\mathcal{P}_j \widehat{g} - \widehat{g}\,|| = 0$$

ピタゴラスの定理より，$||\mathcal{P}_j \widehat{g} - \widehat{g}\,||^2 = ||\widehat{g}\,||^2 - ||\mathcal{P}_j \widehat{g}\,||^2$ が成り立つから，

$$|\widehat{\varphi}(0)| = 1 \iff \text{任意の}\,\widehat{g} \in L^2(\mathbf{R})\,\text{に対し，}\lim_{j\to+\infty} ||\mathcal{P}_j \widehat{g}\,|| = |\widehat{\varphi}(0)|\, ||\widehat{g}\,||$$

を示せばよい．これは $\widehat{f} \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ に対しては，$|\widehat{\varphi}| \leq 1$ かつ $\widehat{\varphi}$ は原点で連続だから，(6.7) でルベーグの収束定理が使えて，$\lim_{j\to+\infty} ||\mathcal{P}_j \widehat{f}||^2 = |\widehat{\varphi}(0)|^2 \int |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi$，すなわち，$\lim_{j\to+\infty} ||\mathcal{P}_j \widehat{f}|| = |\widehat{\varphi}(0)| \, ||\widehat{f}||$ が成り立つことより明らかである．$\widehat{g} \in L^2(\mathbf{R})$ に対しては，$C_0^\infty(\mathbf{R})$ が $L^2(\mathbf{R})$ で稠密であることから，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，$\widehat{f} \in C_0^\infty(\mathbf{R})$ があって，$||\widehat{g} - \widehat{f}|| < \varepsilon$ が成り立つので，射影作用素の性質より，$||\mathcal{P}_j \widehat{g} - \mathcal{P}_j \widehat{f}|| \leq ||\widehat{g} - \widehat{f}|| < \varepsilon$ となることを考えれば明らかであろう．□

今までの結果をまとめて定理として述べておこう．

定理 6.2.1　関数 φ が無限遠で急減少であって，$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 \equiv 1$ を満たすとしよう．$V_j := \overline{\mathrm{Span}} \{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおく．このとき，関数 φ が $|\widehat{\varphi}(0)| = 1$ を満たし，かつある関数 $m_0(\xi) \in C^\infty(\mathbf{T})$ があって，$\widehat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)$ が成り立つならば，$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ は多重解像度解析になる．

このとき，多重解像度解析に対するスケーリング関数のある意味での一意性を使って $\widehat{\varphi}(0) = 1$ が成り立つようにスケーリング関数を取り直せるので，特に断らない限りはスケーリング関数は $\widehat{\varphi}(0) = 1$ を満たすと考えるのが普通である．

6.3　スケーリング関数の正則性

非負の整数 $r \in \mathbf{Z}_+$ に対し，

$$\mathcal{S}_r(\mathbf{R}) := \{f \in C^r(\mathbf{R});\ \ f^{(\alpha)}\,(0 \leq \alpha \leq r)\,\text{は無限遠で急減少}\,\}$$

とする．関数 f が $f \in \mathcal{S}_r(\mathbf{R})$ を満たすとき，f は r **次正則**であるという．[22] では，微分を超関数の意味で考えて，$C^r(\mathbf{R})$ を $L^\infty(\mathbf{R})$ に取り替えた弱い条件を **r-regular** と呼んでいることを注意しておく．もちろん，r 次正則なら r-regular である．また，V_0 のリース基底 $\{g(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ に対し，g が r-regular であるなら，スケーリング関数を (6.1) で定義するとき，φ も r-regular であることを [22] では述べている．

定義 6.3.1　多重解像度解析 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ は，スケーリング関数 φ が r 次正則であるとき，r **次正則**であるという．

0 次正則であるスケーリング関数 φ に対し，

$$E_j^N(x,y) := \sum_{|k|\leq N} \varphi_{jk}(x)\overline{\varphi_{jk}(y)}$$

とおく．このとき，$E_j^N(x,y) = 2^j E_0^N(2^j x, 2^j y)$ とかける．φ が無限遠で急減少だから，(6.2) と (6.4) を使って，$0 \leq N < M$ に対し，

$$|E_0^M - E_0^N| \leq C_1 C_3 (1+|x|)^3 (1+|y|)^{-1} \sum\nolimits_{N<|k|\leq M} (1+|k|)^{-2} \tag{6.8}$$

が成り立つ．したがって，j を固定すると，(6.8) より，$N \to +\infty$ のとき，$E_j^N(x,y)$ は (x,y) に関し広義一様収束し，その極限関数を

$$E_j(x,y) := \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} \varphi_{jk}(x)\overline{\varphi_{jk}(y)} = 2^j E_0(2^j x, 2^j y)$$

とおくと，$E_j(x,y)$ は連続であることがわかる．

補題 6.3.1　任意の正数 m に対し，ある正数 C_m があって，

$$|E_0(x,y)| \leq \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} |\varphi(x-k)|\,|\varphi(y-k)| \leq C_m(1+|x-y|)^{-m} \tag{6.9}$$

が成り立つ．

証明　$\widetilde{E}_0(x,y) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\varphi(x-k)|\,|\varphi(y-k)|$ とおくと，$|E_0(x,y)| \leq \widetilde{E}_0(x,y)$ が成り立つ．したがって (6.9) の右辺の不等式を示せばよい．

まず，$x \in \mathbf{R}$, $y \in [0,1]$ として，(6.9) の右辺の不等式を示そう．(6.4) を使って，

$$1/(1+|x-k|) \leq (1+|y-k|)/(1+|x-y|)$$

$$1/(1+|y-k|)^2 \leq (1+|y|)^2/(1+|k|)^2$$

が成り立つから，(6.2) より，

$$\widetilde{E}_0(x,y) \leq C_m C_{m+2} (1+|x-y|)^{-m} (1+|y|)^2 \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} (1+|k|)^{-2}$$

が成り立つ．したがって，$x \in \mathbf{R}$, $y \in [0,1]$ に対し，(6.9) の右辺の不等式が示せた．

一般の場合は，任意の $k \in \mathbf{Z}$ に対し，$\widetilde{E}_0(x-k, y-k) = \widetilde{E}_0(x,y)$ が成り立つことに注意しよう．y 以下の y に最も近い整数を $[y]$ で表す．特に，$k = [y]$ とすると，

$$\widetilde{E}_0(x,y) = \widetilde{E}_0(x-[y], y-[y]) \leq C_m(1+|x-y|)^{-m}$$

が示せる．□

積分作用素について述べておこう．関数 $K(x,y)$ を考えよう．関数空間 $\mathcal{X}$ の任意の元 $f(x)$ に対し，積分 $\int K(x,y)f(y)\,dy$ が x の関数を定義して，関数空間 $\mathcal{Y}$ の元に

なるなら，この積分によって，$\mathcal{X}$ から $\mathcal{Y}$ への線形作用素 $Tf(x) := \int K(x,y)f(y)\,dy$ が定義できる．このとき，T を**積分作用素**といい，$K(x,y)$ を積分作用素 T の**積分核**または単に**核**と呼ぶ．

0 次正則多重解像度解析 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ の射影作用素 P_j を積分作用素で表してみよう．

補題 6.3.2 射影作用素 P_j に対し，

$$P_j f = \int_{\mathbf{R}} E_j(x,y)f(y)\,dy \tag{6.10}$$

が成り立つ．(6.10) の右辺は $L^2(\mathbf{R})$ から $C(\mathbf{R})$ への積分作用素である．

証明 射影作用素 P_j は，$P_j f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (f,\varphi_{jk})\,\varphi_{jk}$ で定義される．$L^2(\mathbf{R})$ では，

$$P_j f = \lim_{N\to+\infty} \int_{\mathbf{R}} E_j^N(x,y)f(y)\,dy \tag{6.11}$$

とかける．K を $\mathbf{R}$ の任意のコンパクト集合とする．このとき，j だけで決まる正数 $C_j > 0$ があって，$0 \le N < M$ に対し，

$$\begin{aligned} &\sup_{x\in K} \left| \int_{\mathbf{R}} E_j^M(x,y)f(y)\,dy - \int_{\mathbf{R}} E_j^N(x,y)f(y)\,dy \right| \\ \le\;& C_j \sup_{x\in K} (1+2^j|x|)^3 ||f|| \sum_{N<|k|\le M} (1+2^j|k|)^{-2} \end{aligned} \tag{6.12}$$

が成り立つ．実際 (6.8) を使って評価した後，積分にシュワルツの不等式を使えばよい．(6.12) より (6.10) の右辺は x に関して広義一様収束し，連続関数の広義一様収束極限として連続関数であることがわかる．□

(6.12) で $M \to +\infty$ とした評価を考えれば，K と j だけで決まる正数 $C_{K,j} > 0$ があって，

$$\sup_{x\in K} \left| \int_{\mathbf{R}} E_j(x,y)f(y)\,dy \right| \le C_{K,j}||f|| \tag{6.13}$$

が成り立つ．この不等式 (6.13) は (6.10) の右辺が $L^2(\mathbf{R})$ から $C(\mathbf{R})$ への連続な積分作用素であることを意味することに注意しておこう．

補題 6.3.3 スケーリング関数 φ が 0 次正則なら，

$$\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-k) \equiv \widehat{\varphi}(0) \tag{6.14}$$

が成り立つ．

証明 スケーリング関数 φ が無限遠で急減少であるから，$|\varphi(x-k)| \le C_2(1+|x|)^2(1+|k|)^{-2}$ となり，x がコンパクト集合を動くとき，関数項級数 $\sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-k)$ は絶対収束する．また，$\Phi(x) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-k)$ とおくと，$\Phi \in C(2\pi\mathbf{T})$ である．Φ をフーリエ級数展開してみよう．ルベーグの収束定理を使って，

$$
\begin{aligned}
\widehat{\Phi}(\ell) &= \int_0^1 e^{-2\pi i\ell x}\left\{\sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-k)\right\}dx \\
&= \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} \int_0^1 e^{-2\pi i\ell(x-k)}\,\varphi(x-k)\,dx \\
&= \int_{\mathbf{R}} e^{-2\pi i\ell x}\,\varphi(x)\,dx \;=\; \widehat{\varphi}(2\pi\ell)
\end{aligned}
$$

となる．補題 5.5.1 より，$\sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+2\pi k)|^2 \equiv 1$ であり，$\xi=0$ を代入して補題 6.2.4 により $|\widehat{\varphi}(0)|=1$ を使えば，任意の $\ell \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$ に対し，$\widehat{\varphi}(2\pi\ell)=0$ が成り立つ．したがって，$\Phi(x) = \sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \widehat{\Phi}(\ell)\,e^{2\pi i\ell x} = \widehat{\varphi}(0)$ となる．□

補題 6.3.4 スケーリング関数が 0 次正則なら，

$$
\int E_0(x,y)\,dy = 1 \tag{6.15}
$$

が成り立つ．

証明 x を固定して考えよう．(6.9) で $m=2$ とおき，$(1+|x-y|)^{-2} \in L^1(\mathbf{R})$ に注意すると，$|E_0^N(x,y)|$ は N によらない可積分関数で評価できるので，ルベーグの収束定理が使えて，補題 6.3.3 と補題 6.2.4 により，

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} E_0(x,y)\,dy &= \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-k)\int_{\mathbf{R}} \overline{\varphi(y-k)}\,dy \\
&= \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} \varphi(x-k)\overline{\widehat{\varphi}(0)} \;\equiv\; \widehat{\varphi}(0)\overline{\widehat{\varphi}(0)} \;=\; 1
\end{aligned}
$$

が成り立つ．□

補題 6.3.4 で大切なことは，(6.10) が $L^2(\mathbf{R})$ に含まれない関数 f に対しても，意味をもつということである．

補題 6.3.4 を一般化すると，スケーリング関数が r-regular のとき，P_j を r 次以下の多項式にも作用することができて，次の定理が成り立つ．証明は [22] をみよ．

定理 6.3.1　スケーリング関数が r-regular なら，$0 \leq \alpha \leq r$ に対し，

$$x^{\alpha} = \int E_0(x,y) y^{\alpha}\, dy \tag{6.16}$$

が成り立つ．

この定理の意味するところは，r 次以下の多項式 $p(x)$ は，

$$p(x) = \sum\nolimits_{k \in \mathbf{Z}} \big(p(y), \varphi(y-k)\big)\, \varphi(x-k) \tag{6.17}$$

とかけるということである．つまり，r 次以下の多項式がスケーリング関数を整数だけの平行移動した関数系だけで誤差なく表すことができることになる．これは，近似理論にとっては非常に重要なことであって，しばしば，ウェーブレットよりスケーリング関数に興味がもたれることになる．

また [22] では，スケーリング関数が r-regular なら，(6.10) がソボレフ空間 $H^s(\mathbf{R})$, $|s| \leq r$ に作用し，$P_j f$ は，f にソボレフ空間のノルムで収束することが述べられている．

第 7 章

ウェーブレットの正則性

7.1 正規直交ウェーブレット基底の構成

メイエのスケーリング関数からウェーブレットを構成したように，多重解像度解析からウェーブレットが構成できる．

定理 7.1.1 $\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ は多重解像度解析であるとする．関数 $m_0(\xi)$ を補題 6.2.1 によってスケーリング関数 φ から決まる関数とする．このとき，

$$\psi(x) = \mathcal{F}^{-1}\left[e^{-i\xi/2}\,\overline{m_0(\xi/2+\pi)}\,\widehat{\varphi}(\xi/2)\right] \tag{7.1}$$

はウェーブレットである．

証明 多重解像度解析が与えられれば，スケーリング関数 φ が与えられたことになる．多重解像度解析の定義より，$V_0 \subset V_1$ であり，$f = \varphi$ とおき，補題 5.6.2 を使えば，(7.1) から $\psi \in V_0^{\perp}$ である．ここで，$V_0^{\perp}$ は V_0 の V_1 における直交補空間である．(7.1) はメイエのスケーリング関数からウェーブレットを構成する方法と同じで，$m_1(\xi) := e^{-i\xi}\,\overline{m_0(\xi+\pi)}$ とおき，補題 5.6.5 の行列 $M(\xi)$ がすべての ξ に対し，ユニタリ行列になるように選ばれている．$g = \psi$ とおき，補題 5.6.5 を使えば，$\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \{\psi(x-k')\}_{k'\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系になって，補題 5.6.3 より $V_1 = V_0 \oplus W_0$，したがって $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ となる．ただし $W_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{\psi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とする．$\cap_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \{0\}$ を使って，$\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j = \oplus_{j\in\mathbf{Z}} W_j$ となることに注意すると，$\overline{\cup_{j\in\mathbf{Z}} V_j} = L^2(\mathbf{R})$ より，$\{\psi_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ は $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底となる．□

補題 5.6.5 の行列 $M(\xi)$ がすべての ξ に対し，ユニタリ行列になるような $m_1(\xi)$ の選び方はほかにもあって，たとえば，$|\theta(\xi)| \equiv 1$ を満たす周期 π の関数 $\theta(\xi) \in C^\infty(2\mathbf{T})$ を $m_1(\xi)$ にかけても行列 $M(\xi)$ のユニタリ性は保たれる．そこで $m_1(\xi) := \pm e^{\pm i\xi}\,\overline{m_0(\xi+\pi)}$（複号任意）などと定義されることもある．また [13] のように，必要に応じて使いわけていることもあるので注意しよう．これ以後，特に断らない限りは構成方法を (7.1) に固定して考えよう．

ウェーブレットの正則性について考えてみよう．

定理 7.1.2　$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ は r 次正則多重解像度解析であるとする．このとき (7.1) で定義されるウェーブレット ψ は r 次正則である．

証明　補題 6.2.1 の m_0 の定義を思い出そう．(6.3) から決まる無限遠で急減少なフーリエ係数 h_k に対し，$m_0(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k\, e^{-ik\xi}$ と定義した．(7.1) で $m_1(\xi) := e^{-i\xi}\,\overline{m_0(\xi+\pi)}$ とおいたので，$m_1(\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^{1-k}\overline{h_{1-k}}\, e^{-ik\xi}$ となる．(6.3) で x に $2x$ を代入すると，

$$\varphi(x) = 2\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k\, \varphi(2x-k) \tag{7.2}$$

となることを考えれば，(7.1) は

$$\psi(x) = 2\sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^{1-k}\overline{h_{1-k}}\, \varphi(2x-k) \tag{7.3}$$

とかけることがわかる．このフーリエ係数も無限遠で急減少だから，(7.3) は r 回項別微分可能となり，$\psi \in C^r(\mathbf{R})$ である．さらに，$\varphi^{(\alpha)}$（$0 \le \alpha \le r$）が無限遠で急減少であることより，任意の正数 N に対し，ある正数 $C_{\alpha N}$ があって，不等式 $|\varphi^{(\alpha)}(x-k)| \le C_{\alpha N}(1+|k|)^N/(1+|x|)^N$ が成り立つことを使えば，$\psi^{(\alpha)}$（$0 \le \alpha \le r$）も無限遠で急減少であることがわかる．□

7.2　バニシングモーメント

関数 f と $\alpha \in \mathbf{Z}_+$ に対して，$\mathbf{R}$ 上の積分 $\int x^\alpha f(x)\,dx$ を考えよう．この積分が存在するとき，この積分値を f の α 次モーメントという．そして，$\int x^\alpha f(x)\,dx = 0$ なら，f は α 次の**バニシングモーメントをもつ**という．特に，関数 f のフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ が定義できて，$\widehat{f}^{(\alpha)}(\xi)$ が原点で連続なら，f の α 次モーメントは，

$$\int_{\mathbf{R}} x^\alpha f(x)\,dx = \int_{\mathbf{R}} e^{-ix\xi}\, x^\alpha f(x)\,dx\Big|_{\xi=0} = \mathcal{F}[x^\alpha f(x)](0) = i^\alpha \widehat{f}^{(\alpha)}(0) \tag{7.4}$$

と表すことができることに注意しよう.

非負の整数 $r \in \mathbf{Z}_+$ に対し,

$$\mathcal{R}_r(\mathbf{R}) := \{f(x) \in \mathcal{B}^r(\mathbf{R});\ x^\alpha f(x) \in L^1(\mathbf{R}),\ 0 \le \alpha \le r\}$$

とおく. 一般に, $L^1(\mathbf{R}) \cap L^\infty(\mathbf{R}) \subset L^p(\mathbf{R})$ $(1 \le p \le +\infty)$ であるから, $\mathcal{R}_r(\mathbf{R}) \subset L^2(\mathbf{R})$ が成り立つ. また, $\mathcal{S}_r(\mathbf{R}) \subset \mathcal{R}_r(\mathbf{R})$ である. リーマン・ルベーグの定理により, $f \in \mathcal{R}_r(\mathbf{R})$ なら, $\widehat{f} \in \mathcal{B}^r(\mathbf{R})$ である. $\mathbf{R}$ の任意のコンパクト集合上で可積分であるような関数全体を $L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ とかく.

補題 7.2.1 関数 $f(x) \in \mathcal{B}^r(\mathbf{R})$ は $\widehat{f}(\xi) \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ を満たし, 関数 $\widetilde{f}(x) \in L^1(\mathbf{R})$ は $0 \le \alpha \le r$ を満たす $\alpha \in \mathbf{Z}_+$ に対し, $x^\alpha \widetilde{f}(x) \in L^1(\mathbf{R})$ を満たすとする. このとき,

$$(f_{jk}, \widetilde{f}_{j'k'}) = \delta_{jj'}\delta_{kk'} \tag{7.5}$$

が成り立つなら, $0 \le \alpha \le r$ を満たす $\alpha \in \mathbf{Z}_+$ に対し,

$$\int_{\mathbf{R}} x^\alpha \widetilde{f}(x)\, dx = 0 \tag{7.6}$$

が成り立つ.

証明 証明は α に関する帰納法による. (7.5) により, $j \neq 0$ に対し

$$\begin{aligned}(f, \widetilde{f}_{j,2^j+pk}) &= 2^{j/2} \int f(x) \overline{\widetilde{f}(2^j x - 2^{j+p}k)}\, dx \\ &= 2^{-j/2} \int f(2^{-j}y + 2^p k) \overline{\widetilde{f}(y)}\, dy \ = \ 0\end{aligned}$$

が成り立つから,

$$\int f(2^{-j}y + 2^p k) \overline{\widetilde{f}(y)}\, dy = 0 \tag{7.7}$$

となることに注意しよう.

$\alpha = 0$ のときを考えよう. f は有界連続で $\widetilde{f} \in L^1(\mathbf{R})$ だから, (7.7) にルベーグの収束定理が使えて, $j \to +\infty$ とすると,

$$f(2^p k) \int \overline{\widetilde{f}(y)}\, dy = 0$$

である．集合 $\{2^p k;\ p,k\in\mathbf{Z}\}$ は $\mathbf{R}$ で稠密であり，$f(x)$ は連続であるから，任意の $x\in\mathbf{R}$ に対し，

$$f(x)\int\overline{\widetilde{f}(y)}\,dy=0$$

が成り立つ．$f(x)\not\equiv 0$ であるから，$\int\widetilde{f}(x)\,dx=0$ を得る．

(7.6) が $\alpha=\ell-1$（$\ell\le r$）まで成り立つと仮定しよう．$f\in\mathcal{B}^\ell(\mathbf{R})$ より (7.7) にテイラーの定理：

$$\begin{aligned}f(x)&=\sum_{\alpha=0}^{\ell-1}\frac{1}{\alpha!}f^{(\alpha)}(a)(x-a)^\alpha\\&\quad+\frac{1}{(\ell-1)!}(x-a)^\ell\int_0^1(1-\theta)^{\ell-1}f^{(\ell)}\big(a+\theta(x-a)\big)\,d\theta\end{aligned}\tag{7.8}$$

が $x=2^{-j}y+2^pk$, $a=2^pk$ として使えて，

$$\begin{aligned}0&=\int_{\mathbf{R}}f(2^{-j}y+2^pk)\overline{\widetilde{f}(y)}\,dy\\&=\sum_{\alpha=0}^{\ell-1}\frac{1}{\alpha!}f^{(\alpha)}(2^pk)2^{-j\alpha}\int_{\mathbf{R}}y^\alpha\overline{\widetilde{f}(y)}\,dy\\&\quad+\frac{1}{(\ell-1)!}\int_{\mathbf{R}}dy\int_0^1(2^{-j}y)^\ell(1-\theta)^{\ell-1}f^{(\ell)}(2^pk+\theta 2^{-j}y)\overline{\widetilde{f}(y)}\,d\theta\end{aligned}$$

を得る．$2^{-j\ell}$ で割った後，帰納法の仮定を使うと，

$$\frac{1}{(\ell-1)!}\int dy\int_0^1 y^\ell(1-\theta)^{\ell-1}f^{(\ell)}(2^pk+\theta 2^{-j}y)\overline{\widetilde{f}(y)}\,d\theta=0$$

となる．$f^{(\ell)}$ は有界連続で $y^\ell\widetilde{f}(y)\in L^1(\mathbf{R})$ だからルベーグの収束定理が使えて，$j\to+\infty$ のとき，

$$\frac{1}{(\ell-1)!}\int_{\mathbf{R}}dy\int_0^1 y^\ell(1-\theta)^{\ell-1}f^{(\ell)}(2^pk)\overline{\widetilde{f}(y)}\,d\theta=0$$

となるから，

$$\frac{1}{\ell!}f^{(\ell)}(2^pk)\int_{\mathbf{R}}y^\ell\overline{\widetilde{f}(y)}\,dy=0$$

が成り立つ．もし，$f^{(\ell)}(2^pk)\equiv 0$ なら，$f^{(\ell)}(x)\equiv 0$ となり，フーリエ変換すると，$\xi^\ell\widehat{f}(\xi)\equiv 0$ だから，$\widehat{f}\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ であることより，ほとんどいたるところの $\xi\in\mathbf{R}$ に対して，$\widehat{f}(\xi)\equiv 0$ が成り立つことになるが，これは (7.5) に矛盾する．よって $f^{(\ell)}(2^pk)\not\equiv 0$ となり，(7.6) が $\alpha=\ell$ のとき成り立つ．

したがって，帰納法により $0 \le \alpha \le r$ を満たす $\alpha \in \mathbf{Z}_+$ に対し，(7.6) が成り立つ．
□

補題 7.2.1 を多次元に拡張することは容易であろう．

系 7.2.1　関数 $f \in \mathcal{R}_r(\mathbf{R})$ に対し，$\{f_{jk}\}_{j,k\in\mathbf{Z}}$ は $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交系であるとする．このとき，$0 \le \alpha \le r$ を満たす $\alpha \in \mathbf{Z}_+$ に対し，

$$\int x^\alpha f(x)\,dx = 0 \tag{7.9}$$

が成り立つ．

証明　補題 7.2.1 で $f = \widetilde{f}$ とおけばよい．□

系 7.2.1 により，次の r 次正則ウェーブレットのバニシングモーメントに関する定理が成り立つ．

定理 7.2.1　r 次正則ウェーブレット ψ は r 次までのすべてのバニシングモーメントをもつ．

証明　定理 7.1.2 より $\psi \in \mathcal{S}_r(\mathbf{R}) \subset \mathcal{R}_r(\mathbf{R})$ であるから，系 7.2.1 が使えて，$0 \le \alpha \le r$ を満たす $\alpha \in \mathbf{Z}_+$ に対し，(7.9) が成り立つ．□

メイエのウェーブレット ψ は $\psi \in \mathcal{S}(\mathbf{R}) \subset \left(\cap_{r\in\mathbf{Z}_+} \mathcal{S}_r(\mathbf{R})\right)$ だから無限次正則である．したがって無限次までのすべてのバニシングモーメントをもつ．メイエのスケーリング関数 φ は $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbf{R})$ だから無限次正則となり，すべての多項式 $p(x)$ は (6.17) によって，スケーリング関数を整数だけの平行移動した関数系だけで誤差なく表すことができることになる．さらに，メイエのスケーリング関数 φ のフーリエ像 $\widehat{\varphi}$ はコンパクト台をもつので，$\widehat{\psi}(2\xi) = m_1(\xi)\widehat{\varphi}(\xi)$ で定義されたメイエのウェーブレット ψ のフーリエ像 $\widehat{\psi}$ もコンパクト台をもつ．時間周波数の窓でいえば，周波数について最もよい局所化をしていることになる．

逆に，このような性質をもつ時間について最もよい局所化をしているウェーブレットは構成できるのであろうか．つまり，

- 無限次正則でコンパクト台をもつウェーブレットは構成できるか．

という問題を考えよう．

関数 $f(x) \in L^1(\mathbf{R})$ に対し，ある正数 $\delta > 0$ と $C > 0$ があって，$|f(x)| \le C\,e^{-\delta|x|}$ が成り立つなら，f は**指数的減少度をもつ**という．定義から明らかなように，指数的

減少度をもてば無限遠で急減少である．指数的減少度をもつ関数のフーリエ像 $\widehat{f}(\xi)$ を考えよう．ξ を複素数に拡張して $\zeta=\xi+i\eta$ とかく．$\widehat{f}(\zeta)=\int e^{-i\zeta x}f(x)\,dx$ を積分記号下でパラメータ ξ と η について偏微分しよう．

$$|\partial_\xi\{e^{-i\zeta x}f(x)\}|,\ |\partial_\eta\{e^{-i\zeta x}f(x)\}|\le C|x|\,e^{-(\delta-|\eta|)|x|}$$

が成り立つから，ζ が実軸を含む帯状領域 $\{\zeta\in\mathbf{C};\ |\mathrm{Im}\,\zeta|<\delta\}$ を動くときは，ルベーグの定理により積分記号下でパラメータに関して偏微分できる．このとき，

$$\partial_\xi\widehat{f}(\zeta)=\int -ix\,e^{-i\zeta x}f(x)\,dx,\ \ \partial_\eta\widehat{f}(\zeta)=\int x\,e^{-i\zeta x}f(x)\,dx$$

となり，コーシー・リーマン作用素：$\partial_{\bar\zeta}:=(\partial_\xi+i\partial_\eta)/2$ に対し，$\partial_{\bar\zeta}\widehat{f}(\zeta)\equiv 0$ が成り立つので，$\widehat{f}(\zeta)$ は実軸を含む帯状領域で解析的であることを注意しておこう．

定理 7.2.2　ウェーブレット $\psi\in\mathcal{B}^\infty(\mathbf{R})$ で指数的減少度をもつものは存在しない．

証明　ウェーブレット $\psi\in\mathcal{B}^\infty(\mathbf{R})$ で指数的減少度をもつものが存在したとしよう．$\psi\in L^1(\mathbf{R})$ であるから $\widehat{\psi}(\xi)$ は有界連続関数となり，$\widehat{\psi}(\xi)\in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbf{R})$ である．補題 7.2.1 を $f=\widetilde{f}=\psi$ として使えるから，ψ は無限次までのすべてのバニシングモーメントをもつ．指数的減少度をもつ関数のフーリエ像は実軸を含むある帯状領域に解析関数として拡張できるから，ψ の α 次のバニシングモーメントは，$i^\alpha\widehat{\psi}^{(\alpha)}(0)=0$ と表すことができることを使うと，解析関数の一致の定理より $\widehat{\psi}\equiv 0$ すなわち $\psi\equiv 0$ となる．これは矛盾である．□

コンパクト台をもてば，特に指数的減少度をもつことになるから，定理 7.2.2 より無限次正則でコンパクト台をもつウェーブレットは構成できないことになる．そこで無限次正則であることはあきらめることにしよう．

- 任意の $r\in\mathbf{Z}_+$ に対し，r 次正則でコンパクト台をもつウェーブレットは構成できるか．

という問題が考えられる．これに肯定的に回答したのがドベシィのコンパクト台をもつウェーブレットである．これについては章を改めて述べよう．

第 8 章

フィルタ

8.1 信号解析からの準備

この節では信号解析で使われるいくつかの概念について説明するが，数学的な条件等については述べないことをあらかじめ断っておく．信号解析については，たとえば [25] をみよ．

工学でいう信号とは数学では時間 x の関数であると思ってよい．信号 $f(x)$ は $x<0$ のとき $f(x) \equiv 0$ が成り立つなら**因果的**であるといわれる．入力信号 $f(x)$ に対して出力信号（応答）$g(x)$ を対応させる作用素：$g(x) = L[f(x)]$ のことを**システム**という．2 つのシステム L_1 と L_2 があって，L_1 の出力が L_2 の入力につながっているとき,（つまり，合成作用素 $L_2 \circ L_1$ のこと）この 2 つのシステムは**カスケード**（直列）につながっているという．

任意の実数 $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ に対し，$L[\alpha f(x) + \beta g(x)] = \alpha L[f(x)] + \beta L[g(x)]$ が成り立つとき，システム L は**線形**であるという．任意の実数 $T \in \mathbf{R}$ に対し，$g(x) = L[f(x)]$ ならば $g(x-T) = L[f(x-T)]$ が成り立つとき，つまり任意の平行移動と可換であるとき，システム L は**時間不変**であるという．ある正数 $K > 0$ があって，$g(x) = L[f(x)]$ ならば $\sup_{x \in \mathbf{R}} |g(x)| \leq K \sup_{x \in \mathbf{R}} |f(x)|$ が成り立つとき，システム L は**安定**であるという．因果的である入力信号に対し，出力信号も因果的になるとき，システム L は**因果的**であるという．線形で時間不変なシステムを**フィルタ**と呼ぶ．フィルタをいくつか組合せたものを**フィルタバンク**という．フィルタは連続集合上の関数を変換する**連続フィルタ**と離散集合上の関数（したがって数列）を変換する**離散フィルタ**に分類される．

連続フィルタについて述べよう．ある条件のもとでは，連続フィルタはある関数 $h(x)$ があって，合成積：

$$L[f(x)] = h * f(x) := \int h(x-y)f(y)\,dy$$

でかけることが知られている．たとえば，[19] をみよ．逆に合成積でかけているシステムが線形で時間不変であることは明らかであろう．この本では，初めから合成積でかけているフィルタのみを扱う．

この関数 $h(x)$ はディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ を使って，

$$L[\delta(x)] = h * \delta(x) = \int h(x-y)\delta(y)\,dy = h(x)$$

とかけることに注意しよう．関数 $L[\delta(x)]$ をフィルタ L の**インパルス応答**という．この関数 $h(x)$ が $\int_{\mathbf{R}} |h(x)|\,dx < +\infty$ を満たすこととフィルタ L が安定であることは同値であり，$h(x)$ が因果的であることとフィルタ L が因果的であることは同値であることが知られている．

フィルタ L は因果的であるとしよう．インパルス応答 $h(x)$ は因果的だからラプラス変換：

$$\mathcal{L}[h(x)](s) := \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-sx}\,h(x)\,dx = \int_{0}^{+\infty} e^{-sx}\,h(x)\,dx$$

が定義できる．ふつう $\mathcal{L}[h(x)](s)$ を $H(s)$ と表し，$H(s)$ を**伝達関数**と呼ぶ．また，インパルス応答 $h(x)$ のフーリエ変換 $\widehat{h}(\xi)$ を**周波数伝達関数**と呼ぶ．

離散フィルタについて述べよう．信号解析で時間について離散な信号といえば数列のことである．この数列は有限数列のこともあるし，無限数列のこともあるだろう．この本では多くは $\mathbf{Z}$ 上の数列 $x = \{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ を扱う．成分は複素数でもよいが応用上多くは実数である．特に，$n \neq 0$ のとき $\delta_n = 0$ で $n = 0$ のとき $\delta_n = 1$ を満たす信号 δ を**単位インパルス**，あるいは**ディラックインパルス**という．作用素 $S : \{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \mapsto \{x_{n-1}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ を**シフト作用素**と呼ぶ．S は信号を遅れさせる働きをもち，S^{-1} は信号を進ませる働きをもつことを注意しておこう．ある数列 $h = \{h_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ があって，合成積：$(h*x)_n := \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_{n-k}x_k$ で定義される離散フィルタ $H : \{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \mapsto (h*x)_n$ をこの本では特に**デジタルフィルタ**と呼ぶ．

$$(h*x)_n = (x*h)_n = \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} h_k x_{n-k} = \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} h_k S^k x_n$$

が成り立つから，$H = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k S^k$ とかける．単位インパルスにデジタルフィルタを作用させると，$(h*\delta)_n = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_{n-k}\delta_k = h_n$ だから，デジタルフィルタを決め

る数列 h が得られることに注意しよう．$H\delta$ を**インパルス応答**と呼ぶ．この数列 h の成分が有限個の h_n を除き 0 のとき，離散フィルタ H は**有限インパルス応答**であるといい，この数列 h の無限個の成分 h_n が 0 でないとき，H は**無限インパルス応答**であるという．

デジタルフィルタ H は，ある正数 $K > 0$ があって，任意の信号 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ に対し，$y = Hx$ ならば $\sup_{k\in\mathbf{Z}} |y_k| \le K \sup_{k\in\mathbf{Z}} |x_k|$ を満たすとき**安定**であるという．デジタルフィルタ H を定義する数列 h が $\sum_{k\in\mathbf{Z}} |h_k| < +\infty$ を満たすこととデジタルフィルタ H が安定であることは同値であることが知られている．一般に，数列 $\{h_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ に対し，$n < 0$ のとき $h_n = 0$ が成り立つなら数列 h を**因果的**であるという．デジタルフィルタを定義する数列 h が因果的であることとデジタルフィルタ H が因果的であることは同値であることが知られている．

信号が有限数列のときは合成積を定義するために数列が周期的であると考えるのが普通である．つまり，信号を $\{x_n\}_{n=0,\ldots,N}$ とすると，$n = 0,\ldots,N$ に対して，$k \equiv n \pmod{N+1}$ のとき，$x_k = x_n$ とおいて無限数列 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ に拡張しておくのである．これはつねに良い方法であるとはいえない．なぜなら本来離れているはずの x_0 と x_N とが周期的に拡張することにより隣にあることになってしまうからである．

数列 $x = \{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ に対し，数列 x の z **変換**を

$$X(z) := \sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} x_n z^{-n}$$

で定義する．これは $z = e^{i\xi}$ とおくとフーリエ変換を離散化したものに対応し，数列 x が因果的であるときは，$z = e^s$ とおくとラプラス変換を離散化したものに対応している．

デジタルフィルタ H は因果的であるとしよう．インパルス応答 h の z 変換 $H(z)$ を**伝達関数**と呼ぶ．ここで記号 H を乱用していることに注意しよう．信号解析では，S に z^{-1} を対応させれば，これらはすべて本質的に同じものだから同じ記号を使うことがふつうである．インパルス応答 h と数列 x が因果的であるとき，

$$y_n = (h * x)_n = \sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} h_k x_{n-k} = \sum\nolimits_{k=0}^{n} h_k x_{n-k}$$

となる．この z 変換は $Y(z) = H(z)X(z)$ である．ここで大切なことは，フィルタの計算は z 変換によって単なる z^{-1} の多項式の積の計算になるということである．

信号解析でよく使われる記号の乱用を説明しておこう．時間領域におけるデジタル信号を数列 $x = \{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ で表すとき，周波数領域における信号は，$X(e^{i\xi}) =$

$\sum_{n\in\mathbf{Z}} x_n\, e^{-in\xi}$ で表し,（簡略形では $X(e^{i\xi})$ を $X(\xi)$ とかくこともある）z 領域における信号は $X(z) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} x_n\, z^{-n}$ で表す．これらはひとつの信号を違った方法で表現しているにすぎないと考えるのである．同様の表現方法はフィルタの場合にも使われる．

関数に作用するシフト作用素 S を $S : f(x) \mapsto f(x-1)$ で定義すると，(6.3) の右辺は $\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k \varphi(x-k) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k S^k \varphi(x)$ とかける．$H := \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k S^k$ はデジタルフィルタであるから，$m_0(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k\, e^{-ik\xi}$ はデジタルフィルタ H の周波数領域における表現であると思える．同様に，ウェーブレットを構成するときに使う m_1 も，$m_1(\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (-1)^{1-k}\overline{h_{1-k}}\, e^{-ik\xi}$ とかけるから，デジタルフィルタ G を定義することを注意しておこう．

2 つのデジタルフィルタ m_0 と m_1 が補題 5.6.5 の行列 M に関する条件を満たすとき，つまり行列 M がすべての $\xi \in \mathbf{T}$ に対し，ユニタリ行列になるとき，デジタルフィルタ m_0 と m_1 は**共役クワドラチュアフィルタ**であるという．

この本では，共役クワドラチュアフィルタ m_0 と m_1 があって，$\xi \to 0$ のとき $|m_0(\xi)|^2 = 1 + \mathrm{O}(\,|\xi|^2\,)$ が成り立つなら，$m_0(\xi)$ を**ローパスフィルタ**と呼び，$\xi \to 0$ のとき $m_1(\xi) = \mathrm{O}(\,|\xi|\,)$ が成り立つなら，$m_1(\xi)$ を**ハイパスフィルタ**と呼ぶ．共役クワドラチュアフィルタの周波数領域おける表現はトーラス $\mathbf{T}$ 上の関数であるから，$\mathbf{T}$ を 0 の近傍と π の近傍に分けて考えて，$\xi = 0$ の近傍で 1 に近く $\xi = \pi$ の近傍で 0 に近いときがローパスフィルタで，逆に $\xi = 0$ の近傍で 0 に近く $\xi = \pi$ の近傍で 1 に近いときがハイパスフィルタであると思ってよい．たとえば平均をとるフィルタ $H := (1+e^{-i\xi}\,)/2$ はローパスフィルタであり，差をとるフィルタ $G := (1-e^{-i\xi}\,)/2$ はハイパスフィルタである．

一般に，信号 x にローパスフィルタ H と ハイパスフィルタ G を作用させたとき，データ量は 2 倍になるが，情報量は変わらない．したがって出力 Hx と Gx から余剰分を取り除く必要がある．線形作用素 $(\downarrow 2)$ を $(\downarrow 2) : \{y_n\}_{n\in\mathbf{Z}} \mapsto \{y_{2n}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ で定義する．作用素 $(\downarrow 2)$ を**ダウンサンプリング**と呼ぶ．信号 x を完全に復元するためには $(\downarrow 2)Hx$ と $(\downarrow 2)Gx$ の両方を必要とするのが普通である．逆に，信号 $\{y_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ に対し，$x_{2n} = y_n$，$x_{2n+1} = 0$ で定義される信号 $\{x_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ を対応させる線形作用素を $(\uparrow 2)$ と表し，**アップサンプリング**と呼ぶ．これらの線形作用素を行列で表現したとき， $(\downarrow 2)$ の転置行列は $(\uparrow 2)$ であることを注意しておく．

現実に回路として作ることのできるデジタルフィルタは有限個の遅れ（シフト）と定数倍する作用を組み合わせたものである．そこで z 領域で表現したとき，有理関数 $H(z)$ で定義される因果的デジタルフィルタ H を**実現可能フィルタ**と呼ぶ．実現可能

フィルタ $H(z)$ の極は有限個であり，$H(z)$ の $z=0$ でのローラン展開は z の正の整数べきをもたない．したがって，ある円 $\{|z|=r\}$ があって，$H(z)$ のすべての極を内部に含み，$H(z)$ は $\{|z|\geq r\}$ で絶対収束する．特に，すべての極を単位円の内部 $\{|z|<1\}$ に含む実現可能フィルタ $H(z)$ は安定であることに注意しよう．

$H(z)$ が安定な実現可能フィルタであるとき，$z=e^{i\xi}$ を代入した $H(e^{i\xi})$ を**周波数応答**と呼ぶ．周波数応答の絶対値 $|H(e^{i\xi})|$ を**振幅**といい $A(\xi)$ で表し，偏角 $\arg H(e^{i\xi})$ を**位相**と呼ぶ．振幅の平方 $A(\xi)^2$ を**エネルギースペクトル**と呼ぶ．

安定な実現可能フィルタ $H(z)$ に対し，$1/H(z)$ も安定になるとき，$H(z)$ は**最小位相**であるという．$H(z)$ が最小位相であるとき，$H(z)$ と同じ振幅をもつ任意の安定な実現可能フィルタ $\widetilde{H}(z)$ に対して，同じ因果的入力信号 $\{x_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ に対する $H(z)$ の因果的出力信号を $\{y_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$，$\widetilde{H}(z)$ の因果的出力信号を $\{\widetilde{y}_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおくと，任意の負でない整数 $n\in\mathbf{Z}_+$ に対し，$\sum_{k=0}^{n}|y_k|^2\leq\sum_{k=0}^{n}|\widetilde{y}_k|^2$ が成り立つこと（エネルギー集中性）が知られている．

8.2 フィルタと多重解像度解析

定理 6.2.1 を見直してみよう．多重解像度解析を構成するには，無限遠で急減少な関数 φ とフィルタ $m_0\in C^\infty(\mathbf{T})$ を構成することが必要である．m_0 に関する条件は

$$\widehat{\varphi}(2\xi)=m_0(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) \tag{8.1}$$

だけであって，他はすべて φ に関する条件である．これらの連立関数方程式を m_0 を消去して，φ について解くことは難しい．m_0 について解こうとすればどうであろうか．つまり，

- フィルタ $m_0\in C^\infty(\mathbf{T})$ を構成することにより多重解像度解析が構成できないか．

という問題である．

フィルタ m_0 から関数 φ を構成する方法を考えてみよう．関係式 (8.1) の ξ に $\xi/2$ と $\xi/2^2$ を代入した式を使えば，

$$\widehat{\varphi}(\xi)=m_0(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2)=m_0(\xi/2)m_0(\xi/2^2)\widehat{\varphi}(\xi/2^2)$$

が成り立つ．これを $N-1$ 回繰り返せば，

$$\widehat{\varphi}(\xi)=\left(\prod_{j=1}^{N}m_0(2^{-j}\xi)\right)\widehat{\varphi}(2^{-N}\xi)$$

を得る．$N \to +\infty$ とすると，無限乗積が収束し，かつ $\widehat{\varphi}(\xi)$ が $\xi = 0$ で連続で $\widehat{\varphi}(0) = 1$ を満たすなら，

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \prod_{j=1}^{+\infty} m_0(2^{-j}\xi) \tag{8.2}$$

が成り立つ．このとき，関数 $\widehat{\varphi}$ を (8.2) で定義すれば (8.1) を満たすことに注意しよう．

補題 6.2.4 では，多重解像度解析の条件 (c) と $|\widehat{\varphi}(0)| = 1$ が同値であったが，多重解像度解析に対するスケーリング関数のある意味での一意性を使って，多重解像度解析を変えずに $\widehat{\varphi}(0) = 1$ が成り立つようにスケーリング関数を選び直せることに注意しよう．したがって，関数 φ がフィルタ m_0 から構成できるなら，一般性を失うことなく，(8.2) によって構成されなければならないと思ってよい．

多重解像度解析が与えられたとし，スケーリング関数 φ は無限遠で急減少であるとする．このとき，フィルタ m_0 に対する必要条件を求めてみよう．スケーリング関数 φ は無限遠で急減少であることより，補題 6.2.1 を使えば $m_0(\xi) \in C^\infty(\mathbf{T})$ である．$\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が V_0 の正規直交基底であり，$V_0 \subset V_1$ であることから，系 5.6.1 を使えば，(5.20) が成り立つ．補題 6.2.4 より $\widehat{\varphi}(0) \neq 0$ だから，補題 6.2.1 の関係式 (8.1) に $\xi = 0$ を代入して $\widehat{\varphi}(0)$ で割ると $m_0(0) = 1$ が成り立つ．まとめると次の条件になる．

条件 8.2.1

$$\begin{cases} m_0(\xi) \in C^\infty(\mathbf{T}) \\ |m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 \equiv 1 \\ m_0(0) = 1 \end{cases}$$

補題 8.2.1　フィルタ m_0 は条件 8.2.1 を満たすとする．このとき，無限乗積：$\prod_{j=1}^{+\infty} m_0(2^{-j}\xi)$ は $\mathbf{R}$ 上広義一様収束する．

証明　$m_0 \in C^\infty(\mathbf{T}) \subset \mathcal{B}^\infty(\mathbf{R})$ で $m_0(0) = 1$ を満たすから，$\xi = 0$ でテイラーの定理：(7.8) を使うと，

$$m_0(\xi) = 1 + \xi \int_0^1 m_0^{(1)}(\theta\xi)\, d\theta$$

となる．$\|m_0^{(1)}\|_\infty := \max_{\xi\in\mathbf{R}} |m_0^{(1)}(\xi)|$ とおくと，

$$\left| \int_0^1 m_0^{(1)}(\theta\xi)\, d\theta \right| \leq \|m_0^{(1)}\|_\infty$$

が成り立つ．任意の正数 $R>0$ に対し，$j_R > \log_2(R\|m_0^{(1)}\|_\infty)$ を満たす自然数 j_R をとる．このとき，$j \geq j_R$ ならば $|\xi| \leq R$ に対し $m_0(2^{-j}\xi) \neq 0$ である．

$$\sum_{j=j_R}^{+\infty} \left| 2^{-j}\xi \int_0^1 m_0^{(1)}(\theta 2^{-j}\xi)\, d\theta \right| \leq R\|m_0^{(1)}\|_\infty \sum_{j=j_R}^{+\infty} 2^{-j} < +\infty$$

が成り立つから，無限乗積 $\prod_{j=j_R}^{+\infty} m_0(2^{-j}\xi)$ は $|\xi| \leq R$ で一様収束する．有限個の積 $\prod_{j=1}^{j_R-1} m_0(2^{-j}\xi)$ をかけても収束は変わらない．□

フィルタ m_0 は条件 8.2.1 を満たすとする．(8.2) の右辺で左辺の関数 $\widehat{\varphi}$ を定義しよう．補題 8.2.1 により，右辺の無限乗積は $\mathbf{R}$ 上広義一様収束して，極限関数 $\widehat{\varphi}$ は有界連続関数で $|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq 1$ であるから，緩増加な超関数 $\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ の意味で収束している．したがって φ は緩増加な超関数の意味で定義できる．

補題 8.2.2　関数 m_0 は条件 8.2.1 を満たすとする．関数 $\widehat{\varphi}$ を (8.2) で定義する．このとき，任意の $k \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$ に対し，$\widehat{\varphi}(2\pi k) = 0$ が成り立つ．

証明　条件 8.2.1 で $\xi = 0$ とすると $|m_0(0)|^2 + |m_0(\pi)|^2 = 1$ を得る．$m_0(0) = 1$ を代入すると $m_0(\pi) = 0$ である．任意の $k \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$ に対し，ある $m \in \mathbf{Z}_+$ と $\ell \in \mathbf{Z}$ があって，$k = 2^m(2\ell+1)$ とかけることから，$m_0(2\pi k/2^{m+1}) = m_0(\pi + 2\pi\ell) = m_0(\pi) = 0$ となる．関数 $\widehat{\varphi}$ は $m_0(2^{-j}\xi), j \in \mathbf{N}$ の無限乗積で定義され，かつ連続だから $\widehat{\varphi}(2\pi k) = 0$ となる．□

補題 8.2.3　フィルタ m_0 は条件 8.2.1 を満たすとする．超関数 φ を (8.2) で定義する．このとき，$\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ であって $\|\varphi\| \leq 1$ が成り立つ．

証明　自然数 $N \in \mathbf{N}$ に対し，

$$\Pi_N(\xi) := \prod_{j=1}^{N} m_0(2^{-j}\xi), \quad I_N := \int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} |\Pi_N(\xi)|^2\, d\xi$$

とおく．帰納的に I_N を計算しよう．

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-2\pi}^{2\pi} |m_0(\xi/2)|^2\, d\xi \;=\; 2\int_{-\pi}^{\pi} |m_0(\xi)|^2\, d\xi \\ &= 2\int_{-\pi}^{0} \left(|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2\right) d\xi \;=\; 2\pi \end{aligned}$$

である．Π_N が周期 $2^{N+1}\pi$ の関数であるから，

$$\begin{aligned} I_N &= \int_0^{2^{N+1}\pi} |\Pi_N(\xi)|^2\, d\xi \\ &= \int_0^{2^{N+1}\pi} |\Pi_N(\xi)|^2 \Big(|m_0(\xi/2^{N+1})|^2 + |m_0(\xi/2^{N+1}+\pi)|^2\Big)\, d\xi \\ &= \int_0^{2^{N+1}\pi} |\Pi_{N+1}(\xi)|^2\, d\xi \\ &\quad + \int_0^{2^{N+1}\pi} |\Pi_N(\xi+2^{N+1}\pi)|^2 |m_0\Big((\xi+2^{N+1}\pi)/2^{N+1}\Big)|^2\, d\xi \\ &= \int_0^{2^{N+2}\pi} |\Pi_{N+1}(\xi)|^2\, d\xi \;=\; I_{N+1} \end{aligned}$$

となり，すべての自然数 $N \in \mathbf{N}$ に対して，$I_N = 2\pi$ が成り立つ．$|m_0(\xi)| \leq 1$ より $|\widehat{\varphi}(\xi)| \leq |\Pi_N(\xi)|$ であるから，

$$\int_{-2^N\pi}^{2^N\pi} |\widehat{\varphi}(\xi)|^2\, d\xi \leq I_N = 2\pi$$

となる．$N \to +\infty$ とすると，連続有界関数 $\widehat{\varphi}$ は $||\widehat{\varphi}||^2 \leq 2\pi$ を満たすから $\widehat{\varphi} \in L^2(\mathbf{R})$ である．パーシバルの等式 (5.1) より，$\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ であって $||\varphi||^2 \leq 1$ を満たす．□

フィルタ m_0 が条件 8.2.1 を満たすとき，(8.2) で定義される関数 $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ は多重解像度解析を構成できるのだろうか．これが一般には不可能であることが次の補題からわかる．

補題 8.2.4　関数 $m_0 \in C^\infty(\mathbf{T})$ をスケーリング関数 φ が無限遠で急減少である多重解像度解析から決まるフィルタであるとする．このとき，条件 8.2.1 を満たすが，多重解像度解析から決まるフィルタではない（可算）無限個のフィルタ $\{m_{0,p}\}_{p\in\mathbf{N}}$ が存在する．

証明　自然数 $p \in \mathbf{N}$ に対し，$m_{0,p}(\xi) := m_0\big((2p+1)\xi\big)$ とおく．明らかに $m_{0,p}$ は条件 8.2.1 を満たす．もし $m_{0,p}$ が多重解像度解析から決まるフィルタであるなら，付随するスケーリング関数 φ_p は無限乗積 (8.2) によって計算できる．つまり，

$$\widehat{\varphi}_p(\xi) = \prod_{j=1}^{+\infty} m_{0,p}(2^{-j}\xi) = \widehat{\varphi}\big((2p+1)\xi\big) \tag{8.3}$$

が成り立つ．$\|\widehat{\varphi}_p\|^2 = (2p+1)^{-1}\|\widehat{\varphi}\|^2$ より，$\|\varphi\| = 1$ を使えば，$\|\varphi_p\| = 1/\sqrt{2p+1}$ である．これは $\{\varphi_p(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系であることに反している．□

補題 8.2.4 の証明で定義したフィルタ $m_{0,p}$ は次に述べるような面白い性質をもっている．フィルタ m_0 が条件 8.2.1 を満たすことより，$k \in \mathbf{Z}$ に対し，$m_0\big((2k+1)\pi\big) = 0$ であるから $m_{0,p}\big((2k+1)\pi/(2p+1)\big) = 0$ が成り立つ．偶数の集合を $2\mathbf{Z}$ とかくと，$\{2^j(2k+1)\}_{j\in\mathbf{N},k\in\mathbf{Z}} = 2\mathbf{Z}\backslash\{0\}$ だから，$k' \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$ に対し，$\widehat{\varphi}_p\big(2\pi k'/(2p+1)\big) = 0$ である．したがって，$\ell \in \mathbf{Z}$ のとき $1+\ell(2p+1) \neq 0$ に注意すると，

$$\sum\nolimits_{\ell\in\mathbf{Z}} \left|\widehat{\varphi}_p\Big(\frac{2\pi}{2p+1} + 2\pi\ell\Big)\right|^2 = 0 \tag{8.4}$$

となる．式 (8.4) が成り立つなら，$\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ はリース基底にもなり得ないことが知られている．

フィルタ m_0 が条件 8.2.1 を満たすとき，(8.2) で定義される関数 $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ が多重解像度解析を構成するための必要十分条件が知られているので結果だけ述べよう．詳しくは [12] をみよ．コンパクト台をもつウェーブレットを構成するために必要となる十分条件については次章で証明を与える．

定義 8.2.1　$\mathbf{R}$ のコンパクト集合 K が有限個の閉区間の和集合であって，ほとんどいたるところの $\xi \in [-\pi, \pi]$ に対し，$\xi - \nu \in 2\pi\mathbf{Z}$ となる $\nu \in K$ がただひとつ存在するとき，コンパクト集合 K は 閉区間 $[-\pi, \pi]$ に 2π **を法として合同である**という．

このようなコンパクト集合 K は，閉区間 $[-\pi, \pi]$ を有限個の端点以外ではオーバーラップしない閉区間に分割して，それらの閉区間を重ならないように 2π の整数倍だけ平行移動したものであると思ってよい．

条件 8.2.2　閉区間 $[-\pi, \pi]$ に 2π を法として合同であって 0 を内点にもつコンパクト集合 K があって，任意の $j \in \mathbf{N}$ と任意の $\xi \in K$ に対し，$m_0(2^{-j}\xi) \neq 0$ が成り立つ．

応用上この条件 8.2.2 を確かめることは難しいようにみえるがそうでもない．K がコンパクトだから，正数 $R > 0$ があって，$K \subset [-R, R]$ が成り立つ．補題 8.2.1 の証明でみたように，自然数 $j_R \in \mathbf{N}$ があって，$j \geq j_R$ ならば $|\xi| \leq R$ に対し $m_0(2^{-j}\xi) \neq 0$ である．したがって，有限個の積 $\prod_{j=1}^{j_R-1} m_0(2^{-j}\xi)$ が K 上に零点をもたないことを示せば十分であるが，これはフィルタ m_0 が $K/2, K/4, \ldots, 2^{-(j_R-1)}K$ 上に零点をもたないことと同値である．

定理 8.2.1 フィルタ m_0 が条件 8.2.1 を満たすとき，(8.2) で定義される関数 φ が多重解像度解析を構成する無限遠で急減少なスケーリング関数になるための m_0 に対する必要十分条件は m_0 が条件 8.2.2 を満たすことである．

系 8.2.1 条件 8.2.2 が成り立つためのフィルタ m_0 に対する十分条件は，任意の $\xi \in [-\pi/3, \pi/3]$ に対し，$m_0(\xi) \neq 0$ が成り立つことである．

補題 8.2.4 の証明で定義したフィルタ $m_{0,1}$ は条件 8.2.1 と $m_{0,1}(\pm\pi/3) = 0$ を満たすから，この系の十分条件は任意の $\xi \in [-\alpha, \alpha]$ に対し，$m_0(\xi) \neq 0$ が成り立つという形では最良であるといえる．

8.3 フィルタと伸張方程式

前節ではフィルタの周波数領域における表現を使って多重解像度解析の構成について考えてみた．この節ではフィルタの時間領域における表現を使って考えてみよう．

関係式 (8.1) を時間領域で表現すると (7.2) である．この関数方程式 (7.2) を**伸張方程式**と呼ぶ．ウェーブレットが満たすべき関数方程式

$$\widehat{\psi}(2\xi) = m_1(\xi)\widehat{\varphi}(\xi) \tag{8.5}$$

で $m_1(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k\, e^{-ik\xi}$ とおき，(8.5) を時間領域で表現した関数方程式

$$\psi(x) = 2\sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k\varphi(2x-k) \tag{8.6}$$

を**ウェーブレット方程式**と呼ぶ．(7.3) のように，$m_1(\xi) := e^{-i\xi}\,\overline{m_0(\xi+\pi)}$ とおいた場合は $g_k = (-1)^{1-k}\overline{h_{1-k}}$ であるが，ウェーブレット方程式の場合は $m_1(\xi) := -e^{-i\xi}\,\overline{m_0(\xi+\pi)}$ とおいて $g_k = (-1)^k\overline{h_{1-k}}$ を使う構成法が標準的である．

補題 6.2.1 の証明をみれば，関数 φ が無限遠で急減少であって，$\{\varphi(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系であるとき，$V_j := \overline{\mathrm{Span}}\,\{\varphi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおくと，$\{V_j\}_{j\in\mathbf{Z}}$ が増大列である条件 (a) と，ある無限遠で急減少な数列（フィルタ）$h = \{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ があって，伸張方程式 (7.2) が成り立つことは同値であることがわかる．したがって，

- 伸張方程式を定義する無限遠で急減少なフィルタ $h = \{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ から多重解像度解析を構成する．

という問題が考えられる．もちろん，m_0 と h がひとつのフィルタの異なる表現であるので，前節でわかっていることを別の形で表現するだけであるが，両方の表現を知っておくことは大切である．

条件 8.2.1 を時間領域で表現してみよう．

条件 8.3.1

$$\begin{cases} h\text{が無限遠で急減少} \\ 2\sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n\overline{h}_{n+2k} = \delta_{0,k} \\ \sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n = 1 \end{cases}$$

補題 8.3.1　$m_0(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k\, e^{-ik\xi}$ とおくとき，条件 8.2.1 と条件 8.3.1 は同値である．

証明

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 \equiv 1 \iff 2\sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n\overline{h}_{n+2k} = \delta_{0,k} \tag{8.7}$$

以外は明らかであろう．

h が無限遠で急減少であることから，2 重級数が絶対収束するので和の順序をどのように変えてもよいことに注意すると，

$$\begin{aligned} |m_0(\xi)|^2 &= \left(\sum_{n\in\mathbf{Z}} h_n\, e^{-in\xi}\right)\left(\sum_{\ell\in\mathbf{Z}} \overline{h}_\ell\, e^{i\ell\xi}\right) \\ &= \sum_{n,\ell\in\mathbf{Z}} h_n\overline{h}_\ell\, e^{i(\ell-n)\xi} \\ |m_0(\xi+\pi)|^2 &= \sum_{n,\ell\in\mathbf{Z}} (-1)^{\ell-n} h_n\overline{h}_\ell\, e^{i(\ell-n)\xi} \end{aligned}$$

より，$k = \ell - n$ とおくと，

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_0(\xi+\pi)|^2 = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \left(\sum_{n\in\mathbf{Z}} \{1+(-1)^k\} h_n\overline{h}_{k+n}\right) e^{ik\xi}$$

が成り立つ．定数関数 1 のフーリエ級数が $1 = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \delta_{0,k}\, e^{ik\xi}$ であることより，(8.7) の同値性がわかる．□

(8.7) の右辺はフィルタ $h = \{h_n\}_{n\in\mathbf{Z}}$ が自分自身を 0 でない偶数 $2k$（$k \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$）だけずらしたフィルタ $S^{2k}h = \{h_{n-2k}\}_{n\in\mathbf{Z}}$ と $\ell^2(\mathbf{Z})$ の意味で直交していることを意味するから，**ダブルシフト直交性**と呼ばれる．

補題 8.2.1 の無限乗積はどのように表現されるだろうか．伸張方程式 (7.2) の右辺を使って，$L^2(\mathbf{R})$ 上の有界線形作用素 T を

$$T[f(x)] := 2\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k f(2x-k) \tag{8.8}$$

で定義しよう．T が有界であることは，関係式 (8.8) の周波数領域での表現を $\mathcal{T} := \mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}$ とおくと，

$$\mathcal{T}[\widehat{f}(\xi)] = \mathcal{F}T\mathcal{F}^{-1}[\widehat{f}(\xi)] = \mathcal{F}T[f(x)] = m_0(\xi/2)\widehat{f}(\xi/2)$$

であることからわかる．初期値 $f_1(x) \in L^2(\mathbf{R})$ を与えて，自然数 $n \in \mathbf{N}$ に対し，$f_{n+1}(x) = T[f_n(x)]$ で帰納的に関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を決める．このとき，

$$\widehat{f}_{n+1}(\xi) = \mathcal{T}^n[\widehat{f}_1(\xi)] = \left(\prod_{j=1}^{n} m_0(2^{-j}\xi)\right)\widehat{f}_1(2^{-n}\xi)$$

が成り立つ．したがって，無限乗積はフィルタ T を無限回作用させることに対応する．伸張方程式 (7.2) は $T[\varphi] = \varphi$ と表せるから φ は T の不動点であることに注意しよう．つまり，φ は線形作用素 T の固有値 1 に対する固有ベクトルである．

多重解像度解析を構成する無限遠で急減少なスケーリング関数 φ を構成する十分条件は，たとえば適当な初期値 $f_1 \in L^2(\mathbf{R})$ から出発して，関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ を $f_{n+1} = T[f_n]$ で帰納的に決めたとき，関数列 $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が $L^2(\mathbf{R})$ の意味で収束する条件を求めることになる．フィルタ T を何度も作用させるこのアルゴリズムを**カスケードアルゴリズム**と呼ぶ．一般には $\{f_n\}_{n\in\mathbf{N}}$ が発散する場合や弱収束しかしない場合があり，初期値のとり方も問題になる．$L^2(\mathbf{R})$ の意味で収束する条件については，フィルタが有限インパルス応答のときに詳しく調べられていて，**推移行列**と呼ばれる行列を定義し，推移行列の固有値に対する条件で特徴づけられている．詳しくは [26] をみよ．

8.4　高速ウェーブレット変換アルゴリズム

数値計算で信号（関数） $f(x)$ のウェーブレット展開の係数 (f, ψ_{jk}) を求めるアルゴリズムを考えてみよう．

信号はあるサンプリング間隔 $\delta > 0$ でサンプリングされた離散データ $\{f(n\delta)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ であると思ってよい．まず思い浮かぶのは，ウェーブレット $\{\psi_{jk}\}$ を展開しようとしている信号のサンプリング間隔に応じてサンプルして，積分を通常の数値積分で行う

ことであろう．たとえば $\{\psi_{jk}(n\delta)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ として $\sum_{n\in\mathbf{Z}}\delta f(n\delta)\psi_{jk}(n\delta)$ を計算するのである．この方法はフーリエ変換の数値計算ではよく使われる標準的な方法である．

残念なことに，この方法は次に述べるいくつかの理由によってうまくいかない．

(1) フィルタ h から構成されるウェーブレットはカスケードアルゴリズムの極限関数として定義されるので，よく知られた関数で明確に表現されているわけではなく $\{\psi_{jk}(n\delta)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ が計算できるとはかぎらないこと．次章で述べるドベシィのコンパクト台をもつウェーブレットはこのタイプである．

(2) スケールパラメータ j が大きくなるにつれてウェーブレットは激しく振動するようになるので，シャノンの標本定理を考えればわかるように，一定のサンプリング間隔 δ では $\{\psi_{jk}(n\delta)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ が表しきれないこと．

(3) スケールパラメータ j が小さくなるにつれてウェーブレット $\{\psi_{jk}(n\delta)\}_{n\in\mathbf{Z}}$ の本質的な台が広がるので，計算量が膨大になってしまうこと．

マラーによって考えられたアルゴリズムはまったく違ったもので，次の大胆な仮定から出発する．

- 初めに与える離散データは信号をサンプリングした区間上であるスケールでの近似を与えている．

このスケールは便利のため，$j=0$ に固定しておく．これは，初めに与える離散データを $\{S_{0,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおくと，解析しようと思っている信号が

$$f(x)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} S_{0,k}\varphi(x-k)\in V_0 \tag{8.9}$$

であると仮定していることになる．一般にこの $f(x)$ はもとのアナログ信号とは一致しない．離散データがアナログ信号のサンプリングからつくられたと思うのではなく，離散データから解析しようと考えている信号を (8.9) で定義するのである．一般化されたシャノンの標本定理（定理 5.4.1）でみたように，適当な正数 T があって，$\varphi\in\mathcal{A}_{(1,T)}$ であるなら，閉区間 $[-T,T]$ にバンドリミテッドなアナログ信号に対し，(5.5) と (5.6) が成り立つから，サンプリングした閉区間 $[-T,T]$ にバンドリミテッドなアナログ信号と解析しようと考えている信号は一致していることに注意しよう．

マラーの仮定は $f(x)$ のウェーブレット展開係数の計算に次の 1 点**クワドラチュア公式**：ある $x_0\in\mathbf{R}$ があって，適当な関数の集合に含まれる任意の関数 $\widetilde{f}$ に対し，

$$\int \widetilde{f}(x)\varphi(x)\,dx\approx\widetilde{f}(x_0),\qquad \int \widetilde{f}(x)\psi(x)\,dx\approx 0$$

を使っているとみることもできる．実際，$x_0=0$ であるとし，$\widetilde{f}:=f_{-j,-2^{-j}k}$（$k\in\mathbf{Z}$, $j\in\mathbf{Z}_+$）に対し，1 点クワドラチュア公式が成り立つとすると

$$\int f(x)\varphi(x-k)\,dx\approx f(k),\qquad \int f(x)\psi_{jk}(x)\,dx\approx 0\qquad (k\in\mathbf{Z},\ j\in\mathbf{Z}_+)$$

を得るからである．複数の点における $\widetilde{f}(x)$ の値を使って積分値を近似する高次のクワドラチュア公式により精度の高い議論もできる．詳しくは [26] を見よ．

整数 $j,k\in\mathbf{Z}$ に対し，

$$S_{j,k}:=2^{j/2}(f,\varphi_{jk}),\quad D_{j,k}:=2^{j/2}(f,\psi_{jk}) \tag{8.10}$$

とおく．ここで $2^{j/2}$ は f が定数関数 c のとき，すべての $j,k\in\mathbf{Z}$ に対し，$S_{j,k}=c$ が成り立つようにかけられた正規化定数である．

多重解像度解析の性質より，$V_{j+1}=V_j\oplus W_j$ が成り立つから，$f\in V_{j+1}$ は

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} 2^{-(j+1)/2}S_{j+1,k}\,\varphi_{j+1,k} \\ &= \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} 2^{-j/2}S_{j,k}\,\varphi_{jk}+\sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} 2^{-j/2}D_{j,k}\,\psi_{jk} \end{aligned} \tag{8.11}$$

とかける．伸張方程式 (7.2) とウェーブレット方程式 (8.6) の x に 2^jx-k を代入して $2^{j/2}$ をかけると，

$$\varphi_{jk}=2^{1/2}\sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} h_{n-2k}\varphi_{j+1,n},\ \ \psi_{jk}=2^{1/2}\sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} g_{n-2k}\varphi_{j+1,n} \tag{8.12}$$

となる．(8.12) を (8.10) に代入すると

$$S_{j,k}=\sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}}\overline{h_{n-2k}}\,S_{j+1,n},\quad D_{j,k}=\sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}}\overline{g_{n-2k}}\,S_{j+1,n} \tag{8.13}$$

が成り立つ．この関係式 (8.13) の意味することは，スケール $j+1$ の離散データ $\{S_{j+1,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ からスケール j の離散データ $\{S_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ と $\{D_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ を計算するには，$\overline{m_0(\xi)}=\sum_{k\in\mathbf{Z}}\overline{h_{-k}}\,e^{-ik\xi}$ に注意すると，デジタルフィルタとダウンサンプリングの合成作用素である $(\downarrow 2)\circ\overline{m_0(\xi)}$ と $(\downarrow 2)\circ\overline{m_1(\xi)}$ をそれぞれ作用させればよいということである．このデジタルフィルタがスケール j に無関係であることに注意しよう．有限次元の場合には，この計算は単に数ベクトルに定数行列をかけるだけでよいことになる．

逆にスケール j の離散データ $\{S_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ と $\{D_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ からスケール $j+1$ の離散データ $\{S_{j+1,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ を再構成してみよう．(8.1) に $\overline{m_0(\xi)}\pm\overline{m_0(\xi+\pi)}$（複号同

順）をかけた式に (8.5) に $\overline{m_1(\xi)} \pm \overline{m_1(\xi+\pi)}$ をかけた式を加えて補題 5.6.5 の行列 $M(\xi)$ のユニタリ性：

$$|m_0(\xi)|^2 + |m_1(\xi)|^2 \equiv 1, \ \ m_0(\xi)\overline{m_0(\xi+\pi)} + m_1(\xi)\overline{m_1(\xi+\pi)} \equiv 0$$

を使うと，

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \left(\overline{m_0(\xi)} \pm \overline{m_0(\xi+\pi)}\right)\widehat{\varphi}(2\xi) + \left(\overline{m_1(\xi)} \pm \overline{m_1(\xi+\pi)}\right)\widehat{\psi}(2\xi) \tag{8.14}$$

となる．

$$\begin{aligned}
\overline{m_0(\xi)} + \overline{m_0(\xi+\pi)} &= \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} \{1+(-1)^k\}\overline{h_k}\, e^{ik\xi} \;=\; 2\sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} \overline{h_{2n}}\, e^{2in\xi} \\
\overline{m_1(\xi)} + \overline{m_1(\xi+\pi)} &= 2\sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} \overline{g_{2n}}\, e^{2in\xi} \\
\overline{m_0(\xi)} - \overline{m_0(\xi+\pi)} &= 2\sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} \overline{h_{2n+1}}\, e^{i(2n+1)\xi} \\
\overline{m_1(\xi)} - \overline{m_1(\xi+\pi)} &= 2\sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} \overline{g_{2n+1}}\, e^{i(2n+1)\xi}
\end{aligned}$$

をそれぞれ (8.14) に代入して時間領域で表現すると，

$$\varphi(2x) = \sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} \overline{h_{2n}}\,\varphi(x+n) + \sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} \overline{g_{2n}}\,\psi(x+n) \tag{8.15}$$

$$\varphi(2x-1) = \sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} \overline{h_{2n+1}}\,\varphi(x+n) + \sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} \overline{g_{2n+1}}\,\psi(x+n) \tag{8.16}$$

となる．それぞれの式に x に $2^j x - k$ を代入して得られる式をひとつにまとめることにより，

$$S_{j+1,k} = 2\sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} h_{k-2n}\, S_{j,n} + 2\sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} g_{k-2n}\, D_{j,n} \tag{8.17}$$

が成り立つ．この関係式 (8.17) の意味することは，スケール j の離散データ $\{S_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ と $\{D_{j,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ からスケール $j+1$ の離散データ $\{S_{j+1,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ を計算するには，アップサンプリングとデジタルフィルタの合成作用素である $m_0(\xi)\circ(\uparrow 2)$ と $m_1(\xi)\circ(\uparrow 2)$ をそれぞれ作用させて 2 倍して加えればよいということである．

マラーの考えたアルゴリズムについて説明しよう．与えられた離散データ $\{S_{0,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ から (8.13) を繰返し使うことにより，V_0 の分解：

$$V_0 = W_{-1} \oplus W_{-2} \oplus \cdots \oplus W_{-J} \oplus V_{-J}$$

に対応して，ウェーブレット展開係数 $\{S_{j,k}\}_{j\in\{-1,\dots,-J\},k\in\mathbf{Z}}$ と $\{D_{-J,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が求まる．

$$
\begin{array}{ccccccc}
\{S_{0,k}\} & \xrightarrow{(\downarrow 2)\circ\overline{m}_0} & \{S_{-1,k}\} & \cdots & \{S_{-J+1,k}\} & \xrightarrow{(\downarrow 2)\circ\overline{m}_0} & \{S_{-J,k}\} \\
{\scriptstyle (\downarrow 2)\circ\overline{m}_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle (\downarrow 2)\circ\overline{m}_1}\big\downarrow & & {\scriptstyle (\downarrow 2)\circ\overline{m}_1}\big\downarrow & & \\
\{D_{-1,k}\} & & \{D_{-2,k}\} & & \{D_{-J,k}\} & &
\end{array}
$$

また，これらの係数と (8.17) を使って逆に元の与えられた離散データ $\{S_{0,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ を再構成することもできるというアルゴリズムである．

$$
\begin{array}{ccccccc}
\{S_{-J,k}\} & \xrightarrow{2m_0\circ(\uparrow 2)} & \{S_{-J+1,k}\} & \cdots & \{S_{-1,k}\} & \xrightarrow{2m_0\circ(\uparrow 2)} & \{S_{0,k}\} \\
 & & \big\uparrow{\scriptstyle 2m_1\circ(\uparrow 2)} & & \big\uparrow{\scriptstyle 2m_1\circ(\uparrow 2)} & & \big\uparrow{\scriptstyle 2m_1\circ(\uparrow 2)} \\
 & & \{D_{-J,k}\} & & \{D_{-2,k}\} & & \{D_{-1,k}\}
\end{array}
$$

マラーの考えたこのアルゴリズムを**高速ウェーブレット変換アルゴリズム**と呼ぶ．

解析しようとする信号が (8.9) であると仮定するので $S_{0,k}=(f,\varphi_{0k})$ を計算する必要がなくなり (1) の問題は解決される．スケール関数とウェーブレットを使って j が小さくなるように展開するので (2) の問題は解決される．計算はスケール j に無関係なデジタルフィルタを作用させるだけなので本質的な台が広がることは関係なくなり，(3) の問題は解決される．

実用上，適当なウェーブレットを使うことにより信号解析や画像処理などのある種の問題には解析しようとする信号が (8.9) であると仮定してもよいといわれている．

第 9 章

コンパクト台をもつウェーブレット

9.1　コンパクト台をもつスケーリング関数

コンパクト台をもつウェーブレットを構成するために，コンパクト台をもつスケーリング関数について考えよう．

関数系 $\{e^{-ik\xi}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ の有限な線形結合を**三角多項式**と呼ぶ．関数 $m_0(\xi)\in C^\infty(\mathbf{T})$ が三角多項式であることと関数 m_0 のフーリエ級数展開 $m_0(\xi)=\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k\, e^{-ik\xi}$ から決まるフィルタ $h=\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が有限インパルス応答であることとは同値である．

補題 9.1.1　関数 m_0 は条件 8.2.1 を満たす三角多項式であり，ある非負の整数 $L\in\mathbf{Z}_+$ があって，$m_0(\xi)=\sum_{|k|\le L} h_k\, e^{-ik\xi}$ とかけているとする．関数 φ を (8.2) で定義する．このとき $\operatorname{supp}\varphi\subset[-L,L]$ である．

証明　関数 m_0 は条件 8.2.1 を満たし，かつ補題 8.2.1 より無限乗積 $\prod_{j=1}^{+\infty} m_0(2^{-j}\xi)$ は $\widehat{\varphi}$ に $\mathbf{R}$ 上広義一様収束する．超関数 $\mathcal{D}'(\mathbf{R})$ の意味で φ の台を調べよう．実数 $a\in\mathbf{R}$ に対し，$\mathcal{F}^{-1}[e^{-ia\xi}]=\delta(x-a)$ となることを使えば，$j\in\mathbf{Z}_+$ に対し，

$$\mathcal{F}^{-1}[m_0(2^{-j}\xi)]=\sum_{|k|\le L} h_k\,\mathcal{F}^{-1}\left[e^{-ik\xi/2^j}\right]=\sum_{|k|\le L} h_k\,\delta(x-2^{-j}k)$$

が成り立つ．$I_j:=[-L/2^j,L/2^j]$ とおくと，$\operatorname{supp}\delta(x-2^{-j}k)=\{2^{-j}k\}$ だから，$\operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}[m_0(2^{-j}\xi)]\subset I_j$ である．

コンパクト台をもつ超関数全体を $\mathcal{E}'(\mathbf{R})$ とかこう．明らかに $\mathcal{E}'(\mathbf{R})\subset\mathcal{S}'(\mathbf{R})$ である．一般に 2 つのコンパクト台をもつ超関数 $S,T\in\mathcal{E}'(\mathbf{R})$ に対し，合成積 $S*T$ が定

義できて, $\mathrm{supp}\,(S*T) \subset \mathrm{supp}\,S + \mathrm{supp}\,T$ が成り立つ.(実数 $\mathbf{R}$ の部分集合 $A, B \subset \mathbf{R}$ に対し, $A + B := \{x + y \in \mathbf{R};\ x \in A, y \in B\}$ とかく.) また $\mathcal{F}[S * T] = \mathcal{F}[S]\mathcal{F}[T]$ が成り立つ.

自然数 $N \in \mathbf{N}$ に対し, $\Pi_N(\xi) := \prod_{j=1}^{N} m_0(2^{-j}\xi)$ とおく.

$$\mathcal{F}^{-1}[\,\Pi_N(\xi)] = \mathcal{F}^{-1}[m_0(2^{-1}\xi)] * \cdots * \mathcal{F}^{-1}[m_0(2^{-N}\xi)]$$

が成り立つから, $\mathrm{supp}\,\mathcal{F}^{-1}[\,\Pi_N(\xi)] \subset I_1 + \cdots + I_N = \{|x| \le (1 - 2^{-N})L\} \subset I_0$ である. テスト関数 $f \in C_0^\infty(\mathbf{R} \backslash I_0)$ に対し,

$$\langle \varphi, f \rangle = \langle \mathcal{F}^{-1}[\,\lim_{N\to\infty} \Pi_N(\xi)], f \rangle = \lim_{N\to\infty} \langle \mathcal{F}^{-1}[\,\Pi_N(\xi)], f \rangle = 0$$

となるから $\mathrm{supp}\,\varphi \subset I_0$ である. □

補題 9.1.2　無限遠で急減少なスケーリング関数をもつ多重解像度解析が与えられたとする. スケーリング関数 φ がコンパクト台をもつことと伸張方程式を定義するフィルタ h が有限インパルス応答であることとは同値である.

証明　伸張方程式 (7.2) を定義するフィルタ $h = \{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は

$$h_k := 2^{-1} \int \varphi(x/2)\overline{\varphi(x-k)}\,dx \tag{9.1}$$

で与えられることに注意しよう.

スケーリング関数 φ がコンパクト台をもつなら, 関数 $\varphi(x/2)$ の台と関数 $\varphi(x-k)$ の台が交わりをもつのは有限個の k についてのみとなり, フィルタ h は有限インパルス応答でなければならない.

逆にフィルタ h は有限インパルス応答であるなら, スケーリング関数 φ から (9.1) によって決まる関数 m_0 が三角多項式となり, 多重解像度解析が無限遠で急減少なスケーリング関数 φ をもつことから, 関数 m_0 は条件 8.2.1 を満たす. 多重解像度解析に対するスケーリング関数のある意味での一意性から, φ は (8.2) を満たすとしてよい. 補題 9.1.1 よりスケーリング関数 φ はコンパクト台をもつ. □

関数 $\varphi(x) \in L^2(\mathbf{R})$ に対し, $\alpha(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2$ とおく. $\alpha \in L^1(\mathbf{T})$ である.

補題 9.1.3　関数 $m_0(\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k\, e^{-ik\xi}$ は三角多項式であって条件 8.2.1 を満たすとする. 関数 φ を (8.2) で定義する. このとき $\alpha \in C(\mathbf{T})$ である.

証明　補題 8.2.3 より $\varphi \in L^2(\mathbf{R})$ であって，補題 9.1.1 より φ はコンパクト台をもつから，任意の非負の整数 $m \in \mathbf{Z}_+$ に対し，$\widehat{\varphi} \in H^m(\mathbf{R})$ である．ソボレフの埋込み定理により $\widehat{\varphi} \in \mathcal{B}^\infty(\mathbf{R})$ となる．

α が $\mathbf{T}$ 上の関数であることより，α が $[-\pi, \pi]$ 上連続であることをいえばよい．$\xi \in [-\pi, \pi]$ と $k \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$ に対し，微積分学の基本定理より，

$$\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k) - \widehat{\varphi}(2\pi k) = \int_{2\pi k}^{\xi+2\pi k} (\widehat{\varphi})'(\xi)\, d\xi$$

が成り立つから，補題 8.2.2 より，任意の $k \in \mathbf{Z}\backslash\{0\}$ に対し，$\widehat{\varphi}(2\pi k) = 0$ であることを使って，

$$|\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)| \leq \int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k} |(\widehat{\varphi})'(\xi)|\, d\xi$$

と評価できる．シュワルツの不等式を使って，

$$|\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k)|^2 \leq 2\pi \int_{-\pi+2\pi k}^{\pi+2\pi k} |(\widehat{\varphi})'(\xi)|^2\, d\xi$$

を得る．$\widehat{\varphi} \in H^1(\mathbf{R})$ であるから，級数 $\alpha(\xi)$ は $[-\pi, \pi]$ 上一様収束する．$\widehat{\varphi} \in \mathcal{B}(\mathbf{R})$ であるから，$\alpha(\xi)$ は連続関数の一様収束極限となり $[-\pi, \pi]$ 上連続である．□

次の補題は定理 8.2.1 の系 8.2.1 の特別な場合になっている．

補題 9.1.4　関数 m_0 は三角多項式であって条件 8.2.1 を満たすとする．関数 φ を (8.2) で定義する．このとき $\xi \in [-\pi/2, \pi/2]$ に対し，$m_0(\xi) \neq 0$ が成り立つならば，関数 φ は多重解像度解析を構成するコンパクト台をもつスケーリング関数である．

証明　$\alpha(\xi) \equiv 1$ が成り立つことを示せばよい．なぜなら，補題 5.5.1 より $\{\varphi(x - k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は正規直交系となり，関数 φ は定理 6.2.1 の条件を満たすので補題 9.1.2 を使えば，関数 φ は多重解像度解析を構成するコンパクト台をもつスケーリング関数となるからである．

補題 8.2.2 と $\widehat{\varphi}(0) = 1$ が成り立つことを使えば，$\alpha(0) = 1$ である．したがって，α が定数関数であることを示せばよい．$g(\xi) := |m_0(\xi)|^2$ とおく．このとき，$0 \leq g(\xi) \leq 1$ かつ $g(\xi) + g(\xi + \pi) \equiv 1$ である．また，$|\widehat{\varphi}(\xi)|^2 = \prod_{j=0}^{+\infty} g(2^{-j}\xi)$ が成り立つ．関数 φ は (8.1) を満たすから，$\alpha(2\xi) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} |m_0(\xi + \pi k)|^2 |\widehat{\varphi}(\xi + \pi k)|^2$ が成り立つ．k が偶数のときと奇数のときの和に分けて，関数 m_0 の周期性を使えば，

$$\alpha(2\xi) \quad = \quad |m_0(\xi)|^2 \sum\nolimits_{k'\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi + 2\pi k')|^2$$

$$\begin{aligned} &+|m_0(\xi+\pi)|^2 \sum\nolimits_{k''\in\mathbf{Z}} |\widehat{\varphi}(\xi+\pi+2\pi k'')|^2 \\ = \quad & g(\xi)\alpha(\xi) + g(\xi+\pi)\alpha(\xi+\pi) \end{aligned} \tag{9.2}$$

となる．補題 9.1.3 より α は連続関数だから，

$$m := \min\nolimits_{\xi\in\mathbf{T}} \alpha(\xi), \quad M := \max\nolimits_{\xi\in\mathbf{T}} \alpha(\xi)$$

とおく．$\xi_0 \in [-\pi,\pi]$ を $m = \alpha(\xi_0)$ を満たすひとつの点とする．$\xi_0/2 \in [-\pi/2, \pi/2]$ だから，$m_0(\xi_0/2) \neq 0$ となり，$g(\xi_0/2) > 0$ が成り立つことに注意しよう．(9.2) に $\xi = \xi_0/2$ を代入すると，$\alpha(\xi_0) = g(\xi_0/2)\alpha(\xi_0/2) + g(\xi_0/2+\pi)\alpha(\xi_0/2+\pi)$ である．左辺に $g(\xi_0/2) + g(\xi_0/2+\pi) = 1$ をかけて整理すると，

$$g(\xi_0/2)\{\alpha(\xi_0/2) - \alpha(\xi_0)\} + g(\xi_0/2+\pi)\{\alpha(\xi_0/2+\pi) - \alpha(\xi_0)\} = 0 \tag{9.3}$$

となる．$g(\xi_0/2) > 0, \alpha(\xi_0/2) - \alpha(\xi_0) \geq 0, g(\xi_0/2+\pi) \geq 0, \alpha(\xi_0/2+\pi) - \alpha(\xi_0) \geq 0$ が成り立つから，(9.3) が成り立つためには $\alpha(\xi_0/2) - \alpha(\xi_0) = 0$ かつ $g(\xi_0/2+\pi)\{\alpha(\xi_0/2+\pi) - \alpha(\xi_0)\} = 0$ でなければならない．したがって $\alpha(\xi_0/2) = m$ である．ξ_0 を $\xi_0/2^j$（$j \in \mathbf{N}$）に取り替えて順次同じ議論をすると，任意の $j \in \mathbf{N}$ に対し，$\alpha(\xi_0/2^j) = m$ が成り立つ．α は連続関数だから，$j \to +\infty$ とすると $\alpha(0) = m$ である．$\xi_1 \in [-\pi,\pi]$ を $M = \alpha(\xi_1)$ を満たすひとつの点とし，同様の議論をすると $\alpha(0) = M$ が示せるから，$m = M$ となり α は定数関数である．□

9.2　スペクトル因子分解

コンパクト台をもつスケーリング関数を構成するときに使うリースの補題を信号理論の立場から説明しておこう．

デジタルフィルタ $\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が $h \in \ell^2(\mathbf{Z})$ を満たすとき，h は**エネルギー有限**であるという．エネルギー有限な因果的デジタルフィルタ $h \in \ell^2(\mathbf{Z})$ に対し，$\{|z| > 1\}$ ならば，シュワルツの不等式より，

$$\sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}_+} |h_k z^{-k}| \leq \left(\sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}_+} |h_k|^2\right)^{1/2} \left(\sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}_+} |z|^{-2k}\right)^{1/2} < +\infty$$

が成り立つから，h の z 変換 $H(z)$ は $\{|z| > 1\}$ で解析的である．ここでは最小位相の定義を弱めて，エネルギー有限な因果的デジタルフィルタ h に対し，$H(z)$ と $1/H(z)$ がともに $\{|z| > 1\}$ で解析的であるとき，h は**弱い意味で最小位相**をもつと呼ぶ．

信号解析の重要な問題のひとつに，与えられた振幅 $A(\xi)$ に対し，因果的デジタルフィルタ h を振幅 $|H(e^{i\xi})|$ が $A(\xi)$ に一致するように決めるという問題がある．この問題を**スペクトル因子分解**の問題と呼ぶ．

一般に，$H(z)$ の $z=0$ でのローラン展開の係数が有限個を除いて 0 であるとき，$H(z)$ は z の**ローラン多項式**であるという．

振幅がローラン多項式で与えられる場合にスペクトル因子分解の問題を考えよう．

補題 9.2.1 （**リースの補題**） z のローラン多項式 $A(z) := \sum_{|k|\le L} a_k\, z^{-k}$ $(L \in \mathbf{Z}_+)$ があって，$z = e^{i\xi}$ $(\xi \in \mathbf{R})$ を代入したとき，$A(e^{i\xi}) \ge 0$ を満たすとする．このとき，あるローラン多項式 $H(z) := \sum_{0\le k\le L} h_k\, z^{-k}$ があって，$A(e^{i\xi}) = |H(e^{i\xi})|^2$ が成り立つ．$A(z)$ が実係数なら $H(z)$ も実係数にとれる．

証明 $|z|=1$ のとき，$A(e^{i\xi})$ が実数値だから，$A(z) = \overline{A(z)}$ であり，$\overline{z} = z^{-1}$ に注意すると，

$$\sum_{|k|\le L} a_k\, z^{-k} = \sum_{|k|\le L} \overline{a_{-k}}\, z^{-k} \tag{9.4}$$

である．一致の定理より (9.4) はローラン多項式として等しいから，任意の $|k| \le L$ に対し，$\overline{a}_k = a_{-k}$ が成り立つ．したがって，$z \ne 0$ に対し，

$$\overline{A(z)} = \sum_{|k|\le L} a_{-k}\, (\overline{z})^{-k} = A(1/\overline{z})$$

である．z_0 を $A(z)$ の零点とする．$A(z_0) = 0 = \overline{A(z_0)} = A(1/\overline{z}_0)$ となるから，$1/\overline{z}_0$ も $A(z)$ の零点となる．$z = e^{i\xi_0}$ が $A(z)$ の単位円周上の零点なら，$A(e^{i\xi})$ が $\xi = \xi_0$ の近傍で解析的であることより，$\xi = \xi_0$ のある近傍で零点をもたない解析関数 $a(\xi)$ と $\ell \in \mathbf{N}$ があって，$A(e^{i\xi}) = (\xi - \xi_0)^\ell a(\xi)$ とかける．$A(e^{i\xi}) \ge 0$ が成り立つためには ℓ は偶数でなければならない．$b(\xi) := \{(\xi - \xi_0)/(e^{i\xi} - e^{i\xi_0})\}^\ell a(\xi)$ とおくと，$b(\xi_0) \ne 0$ だから，$A(e^{i\xi}) = (e^{i\xi} - e^{i\xi_0})^\ell b(\xi)$ とかける．したがって，$A(z)$ の単位円周上のすべての零点は偶数べきの重複度をもつことがわかる．

$A(z)$ の零点のうち，単位円の内部にある零点については重複度を込めて考え，単位円周上にある零点については半分の重複度を込めて考えて零点に番号をつけて z_j, $j = 1, \ldots, L$ とおく．このとき，$z_j, 1/\overline{z}_j$ $(j = 1, \ldots, L)$ が $A(z)$ の零点のすべてである．$A(z)$ を因数分解すると，ある定数 c があって，

$$A(z) = cz^{-L} \prod_{j=1}^{L} (z - z_j) \prod_{j=1}^{L} (1 - z\overline{z}_j)$$

となる．$|z|=1$ のとき，$\overline{z^{-1}(z-z_j)}=z(z^{-1}-\overline{z}_j)=(1-z\overline{z}_j)$ であるから，$A(e^{i\xi})\geq 0$ より $c\geq 0$ となることに注意すると，$\theta\in\mathbf{R}$ を任意に選んで，

$$H(z):=\sqrt{c}\,e^{i\theta}z^{-L}\prod_{j=1}^{L}(z-z_j) \tag{9.5}$$

とおけばよいことがわかる．

$A(z)$ が実係数のときを考えよう．z_0 を $A(z)$ の零点とすると $\overline{A(z_0)}=A(\overline{z}_0)$ となるから，$\overline{z}_0$ も $A(z)$ の零点となる．単位円の内部および円周上にある零点 z_j $(j=1,\ldots,L)$ に対し，$\overline{z}_j$ $(j=1,\ldots,L)$ も単位円の内部および円周上にある零点となる．$\overline{z}_1=z_1$ となる場合は $z_1\in\mathbf{R}$ である．このとき，z_1 を α_1 とおく．$\overline{z}_1\neq z_1$ となる場合は，ある $k>1$ があって，$\overline{z}_1=z_k$ が成り立つ．このとき，z_k を $\overline{z}_1$ とおく．このような分類を順にすることによって，適当に番号をつけかえると，ある $L_1,L_2\in\mathbf{Z}_+$ があって，$L_1+2L_2=L$ を満たし，(9.5) は $\theta=0,\pi$ として，

$$H(z):=\pm\sqrt{c}\,z^{-L}\prod_{j=1}^{L_1}(z-\alpha_j)\prod_{j=1}^{L_2}(z-z_j)(z-\overline{z}_j) \tag{9.6}$$

とかける．$(z-z_j)(z-\overline{z}_j)$ が実係数であることに注意すると，(9.6) は実係数のローラン多項式である．□

一般にスペクトル因子分解は一意的ではない．補題 9.2.1 の証明から，ローラン多項式 $H(z)$ に対し，すべての零点が単位円の内部および周上にあるという条件（弱い意味での最小位相）をつければ，絶対値が 1 である複素数倍を除き，一意に決まることがわかる．

9.3　コンパクト台をもつ正則スケーリング関数の構成

補題 9.2.1 により，三角多項式 $g(\xi)=|m_0(\xi)|^2$ が構成できれば，$m_0(\xi)$ が三角多項式として得られることがわかった．コンパクト台をもつ r 次正則スケーリング関数を構成するための三角多項式 $g(\xi)$ に対する十分条件を考えてみよう．

条件 9.3.1

$$\begin{cases} g(\xi):=\sum_{|k|\leq L}\gamma_k\,e^{-ik\xi}\geq 0 \qquad (L\in\mathbf{Z}_+) \\ g(\xi)+g(\xi+\pi)\equiv 1 \\ g(0)=1 \\ g(\xi)>0,\ \ \xi\in[-\pi/2,\pi/2] \\ \prod_{j=1}^{+\infty}g(2^{-j}\xi)\leq C(1+|\xi|)^{-2s} \qquad (s>r+1) \end{cases}$$

補題 9.3.1　三角多項式 g は条件 9.3.1 を満たすとする．このとき，条件 8.2.1 を満たす三角多項式 m_0 があって，関数 φ を (8.2) で定義すれば，関数 φ は多重解像度解析を構成するコンパクト台をもつ r 次正則スケーリング関数である．三角多項式 g が実係数なら三角多項式 m_0 も実係数にとれる．

証明　三角多項式 g から，補題 9.2.1 により，三角多項式 $m_0(\xi)$ を構成する．このとき，(9.5) で適当に定数倍 $e^{i\theta}$（$\theta \in \mathbf{R}$）を調節して，$m_0(0)=1$ を満たすようにとれるから，m_0 が条件 8.2.1 を満たすことは明らかであろう．g が実係数なら，(9.6) で ± 1 を調節すれば，$m_0(0)=1$ を満たし，かつ m_0 も実係数にとれる．また m_0 は補題 9.1.4 の仮定を満たすから，φ は多重解像度解析を構成するコンパクト台をもつスケーリング関数となる．この関数 φ は $|\widehat{\varphi}(\xi)| \le C^{1/2}(1+|\xi|)^{-s}$ を満たすから，$r+1/2<s'<s-1/2$ を満たす任意の $s' \in \mathbf{R}$ に対し，$\varphi \in H^{s'}(\mathbf{R}) \subset \mathcal{B}^r(\mathbf{R})$ となり，φ は r 次正則である．□

条件 9.3.1 を満たす三角多項式 g をどのように構成すればよいのであろうか．$\widetilde{g}$ が三角多項式でない場合には，その他の条件を満たす $\widetilde{g}$ を構成することは容易である．たとえば，$\widetilde{g}(\xi)$ を閉区間 $[-\pi/2,\pi/2]$ の特性関数 $\chi_{[-\pi/2,\pi/2]}$ を周期 2π で拡張した関数 $\widetilde{g}(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} \chi_{[-\pi/2,\pi/2]}(\xi+2\pi k)$ とすればよい．実際，$\xi_0 \in \mathbf{R}\backslash[-\pi,\pi]$ に対し，ある $j_0 \in \mathbf{N}$ があって，$\pi/2<|\xi_0/2^{j_0}|<3\pi/2$ が成り立つので，$\widetilde{g}(\xi_0/2^{j_0})=0$ となり，$\mathrm{supp}\,\prod_{j=1}^{+\infty}\widetilde{g}(2^{-j}\xi) \subset [-\pi,\pi]$ が示せるからである．$\widetilde{g}^2=\widetilde{g}$ より，$\widetilde{g}$ 自身が条件 8.2.1 を満たす．$\widetilde{g}$ を**理想的ローパスフィルタ**と呼ぶ．

この $\widetilde{g}$ になるべく近く，つまり，$\xi=0$ の近傍では 1 に近く，$\xi=\pi$ の近傍では 0 に近いように三角多項式 g を決めよう．自然数 $k \in \mathbf{N}$ に対し，

$$I_k(\xi) := \int_0^{\xi} (\sin t)^{2k+1}\, dt$$

とおく．I_k は周期 2π の非負の関数であって，$[0,\pi]$ で単調増加，かつ $\xi=\pi$ に関して対称になっている．さらに k を大きくすると，$\xi=0$ の近傍で速く 0 に近づくことに注意しよう．$\cos t = u$ とおくと，$I_k(\xi)=\int_{\cos\xi}^{1}(1-u^2)^k\,du$ とかけるから，$I_k(\xi)$ は $\cos\xi$ の $2k+1$ 次の非負な多項式である．

$$g(\xi) := 1 - I_k(\xi)/I_k(\pi) \tag{9.7}$$

とおくと，この g が条件 9.3.1 の無限乗積の評価以外の条件を満たしていることは明らかであろう．この評価を示すにはいくつかの補題が必要である．

補題 9.3.2　ある正数 $C_1 > 0$ があって，すべての $k \in \mathbf{N}$ に対し，$1/I_k(\pi) \leq C_1 k^{1/2}$ が成り立つ．

証明　自然数 $k \in \mathbf{N}$ に対し，$k^{-1/2} < \pi/3$ であるから，

$$\begin{aligned} I_k(\pi) &\geq \int_{\pi/2-k^{-1/2}}^{\pi/2+k^{-1/2}} (\sin t)^{2k+1}\,dt \;\geq\; 2k^{-1/2}\{\sin(\pi/2+k^{-1/2})\}^{2k+1} \\ &= 2k^{-1/2}(\cos k^{-1/2})^{2k+1} \;\geq\; 2k^{-1/2}\{1-1/(2k)\}^{2k+1} \end{aligned}$$

が成り立つ．$\lim_{k\to+\infty}\{1-1/(2k)\}^{2k+1} = e^{-1}$ に注意すると，ある正数 $C_1 > 0$ があって，すべての $k \in \mathbf{N}$ に対し，$I_k(\pi) \geq C_1^{-1} k^{-1/2}$ が成り立つ．□

補題 9.3.3　自然数 $k_1 \in \mathbf{N}$ があって，$k \geq k_1$ ならば，閉区間 $[2\pi/3, 4\pi/3]$ 上では $g(\xi) \leq (4/5)^{k+1}$ が成り立ち，閉区間 $[0, 2\pi]$ 上では $g(\xi) \leq |\xi - \pi|^{2k+2}$ が成り立つ．

証明　$\xi \in [0, 2\pi]$ に対し，$g(\xi) = I_k(\pi)^{-1}\int_\xi^\pi (\sin t)^{2k+1}\,dt$ とかけるから，$|\sin t| = |\sin(\pi - t)| \leq |\pi - t|$ を使うと，補題 9.3.2 より，$C_1 k^{1/2} \leq 2k+2$ ならば，$g(\xi) \leq I_k(\pi)^{-1}|\xi-\pi|^{2k+2}/(2k+2) \leq |\xi-\pi|^{2k+2}$ が成り立つ．また，$\xi \in [2\pi/3, 4\pi/3]$ に対し，$(2\pi/3\sqrt{3})C_1 k^{1/2} \leq (16/15)^{k+1}$ ならば，$(\pi/3)C_1 k^{1/2}(\sqrt{3}/2)^{2k+1} \leq (4/5)^{k+1}$ となるので，

$$g(\xi) \leq I_k(\pi)^{-1}\int_\xi^\pi \left(\sin\frac{2\pi}{3}\right)^{2k+1} dt \leq \frac{\pi}{3}C_1 k^{1/2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{2k+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{k+1}$$

が成り立つ．したがって，$k_1 \in \mathbf{N}$ を $C_1 k_1^{1/2} \leq \min\{2k_1+2, (3\sqrt{3}/2\pi)(16/15)^{k_1+1}\}$ を満たすように十分大きくとればよい．□

補題 9.3.4　関数 $f(t)$ は $0 \leq f(t) \leq 1$ を満たす周期 1 の連続関数であって，ある $0 < \delta < 1$ と $C \geq 0$ に対し，$[1/3, 2/3]$ 上で $0 \leq f(t) \leq \delta$ を満たし，$[0,1]$ 上で $0 \leq f(t) \leq C\,|t - 1/2|$ を満たすとする．$j \in \mathbf{N}$ に対し，$F_j(t) := f(t)f(2t)\cdots f(2^{j-1}t)$ とおく．このとき，ある正数 $\alpha > 0$ があって，$j \geq 2$ に対し，$\sup_{1/4 \leq t \leq 1/2} F_j(t) \leq 2^{-\alpha j}$ が成り立つ．

証明　$h(t) := f(t)f(2t)$ とおき，$j \in \mathbf{N}$ に対し，$H_j(t) := h(t)h(2t)\cdots h(2^{j-1}t)$ とおく．$t \in [1/4, 1/2]$ のとき，$H_j(t) \leq 2^{-\alpha' j}$ を示せばよい．実際，$\alpha = \alpha'/4$ とすると，$0 \leq f(t) \leq 1$ より，$F_{j+1}^2(t) = f(t)H_j(t)f(2^j t) \leq 2^{-\alpha' j} \leq 2^{-2\alpha(j+1)}$ となるからである．関数 h を考える理由は，$[1/6, 1/3] \cup [2/3, 5/6]$ 上で $0 \leq f(2t) \leq \delta$

が成り立つことにより，h は $[1/6,5/6]$ 上で $0 \le h(t) \le \delta$ を満たし，$[0,1]$ 上で $0 \le h(t) \le \min\{1, C\,|t-1/2|\}$ を満たす周期 1 の連続関数であるというその他の f の性質を保持したままになるからである．さらに，$h(1/2)=0$ より，$t \in [1/4,1/2)$ のとき，$j \in \mathbf{N}$ に対し，$H_j(t) \le 2^{-\alpha' j}$ を示せば十分である．

$J := \{0,\ldots,j-1\}$ とおく．$H_j(t)$ を評価するためには，$h(2^q t)$（$q \in J$）を評価すればよいが，h が周期 1 の関数であることより，$2^q t$ の小数部分が問題になる．そこで，$t \in [1/4,1/2)$ の 2 進展開を考えよう．$\alpha_j \in \{0,1\}$（$j \in \mathbf{N}$）があって，

$$t = 0.01\alpha_3\alpha_4\cdots = 0\cdot 2^0 + 0\cdot 2^{-1} + 1\cdot 2^{-2} + \alpha_3\cdot 2^{-3} + \alpha_4 \cdot 2^{-4} + \cdots$$

と（小数の表記に関する通常の規約のもとで）一意的にかける．このとき，$h(2^q t) = h(0.\alpha_{q+1}\alpha_{q+2}\cdots)$ となる．

$t \in [1/4,1/2)$ を固定して考えよう．t に対し，$F := \{q \in J : \alpha_{q+1} \ne \alpha_{q+2}\}$ とおく．$0 \in F$ だから $F \ne \emptyset$ である．$q \in F$ とする．$2^q t$ の小数部分は，$0.10\alpha_{q+3}\cdots$ または $0.01\alpha_{q+3}\cdots$ のどちらかの形になる．このとき，$1/2 \le 0.10\alpha_{q+3}\cdots < 3/4$ または $1/4 \le 0.01\alpha_{q+3}\cdots < 1/2$ となるから，$h(2^q t) \le \delta$ である．集合 F の要素の数を N とおくと，$H_j(t) \le \delta^N$ となるが，N が j に比べて小さいときは，評価が不十分なので別の評価式を組合せよう．$2^q t$ の小数部分が $0.10\alpha_{q+3}\cdots$ のときは，0.1 の後に続く 0 の数（可算無限個の場合もあり得る）を ℓ_q とおき，$0.01\alpha_{q+3}\cdots$ のときは，0.0 の後に続く 1 の数を ℓ_q とおく．このとき，$\sum_{q\in F} \ell_q \ge j$ が成り立つことに注意しよう．$A \in \mathbf{N}$ を $2^A > C$ を満たすようにとる．$\ell_q \ge A$ のときは，$2^q t$ の小数部分と $1/2$ との距離が $2^{-\ell_q}$ 以下になることを使って，$h(2^q t) \le C 2^{-\ell_q}$ である．$1 \le \ell_q < A$ のときは，$h(2^q t) \le \delta$ を使う．$\delta < 1$ かつ $C < 2^A$ だから，ある 1 より小さい正数 α' があって，$\delta \le 2^{-\alpha' A}$ かつ $C \le 2^{A(1-\alpha')}$ を満たす．したがって，任意の ℓ_q に対し，$h(2^q t) \le 2^{-\alpha' \ell_q}$ が成り立つから，

$$H_j(t) \le \prod_{q\in F} h(2^q t) \le 2^{-\alpha' \sum_{q\in F} \ell_q} \le 2^{-\alpha' j}$$

である．□

補題 9.3.5　非負の整数 $r \in \mathbf{Z}_+$ に対し，$s > r+1$ を満たす $s \in \mathbf{R}$ をとる．このとき，自然数 $k_0 \in \mathbf{N}$ と正数 C_0 があって，$k \ge k_0$ ならば，$\prod_{j=1}^{+\infty} g(2^{-j}\xi) \le C_0(1+|\xi|)^{-2s}$ が成り立つ．

証明　自然数 $j \ge 2$ に対し，$K_j := \{\xi \in \mathbf{R};\, 2^j\pi \le |\xi| \le 2^{j+1}\pi\}$ とおき，$G(\xi) := \prod_{j=1}^{+\infty} g(2^{-j}\xi)$ とおく．$G(\xi)$ の $\xi \to +\infty$ での挙動を調べるために $\{|\xi| \ge 4\pi\}$ を

K_j の和集合に分割する．$\xi \in K_j$ とする．g が偶関数であるから G も偶関数となるので，$\xi > 0$ と仮定してよい．$\xi = 2\pi 2^{j+1} t$ とおくと，$1/4 \le t \le 1/2$ である．$f(t) := \{g(2\pi t)\}^{1/2(k+1)}$ とおき，$0 \le g(\xi) \le 1$ に注意すると，

$$\begin{aligned} G(\xi) &\le g(\xi/2^2)\cdots g(\xi/2^{j+1}) \\ &= g(2\pi t)\cdots g(2\pi 2^{j-1}t) = \{f(t)f(2t)\cdots f(2^{j-1}t)\}^{2k+2} \end{aligned}$$

が成り立つ．補題 9.3.3 より，$k \ge k_1$ ならば，閉区間 $[1/3, 2/3]$ 上では $f(t) \le 2/\sqrt{5}$ であり，閉区間 $[0,1]$ 上では $f(t) \le 2\pi|t - 1/2|$ である．$\delta = 2/\sqrt{5}$, $C = 2\pi$ として，補題 9.3.4 を使う．C_0 を $|\xi| \ge 4\pi$ のとき，$C_0 \ge \{2\pi(1 + 1/|\xi|)\}^{2\alpha(k+1)}$ を満たし，$|\xi| \le 4\pi$ のとき，$C_0 \ge (1 + |\xi|)^{2\alpha(k+1)}$ を満たすようにとる．たとえば，$C_0 := (1+4\pi)^{2\alpha(k+1)}$ とすればよい．このとき，$|\xi| \ge 4\pi$ ($\xi \in K_j$) に対し，

$$G(\xi) \le 2^{-2\alpha(k+1)j} \le (|\xi|/2\pi)^{-2\alpha(k+1)} \le C_0(1+|\xi|)^{-2\alpha(k+1)}$$

であり，$|\xi| \le 4\pi$ に対し，

$$G(\xi) \le 1 \le C_0(1+4\pi)^{-2\alpha(k+1)} \le C_0(1+|\xi|)^{-2\alpha(k+1)}$$

が成り立つ．したがって，自然数 $k_0 \in \mathbf{N}$ を $k_0 \ge k_1$ かつ $k_0 \ge -1 + s/\alpha$ を満たすようにとればよい．□

この方法によって構成されるコンパクト台をもつ正則スケーリング関数から，ドベシィのコンパクト台をもつウェーブレットが構成できる．この構成法を定理としてまとめておこう．

定理 9.3.1（ドベシィのウェーブレット）任意の $r \in \mathbf{Z}_+$ に対し，r 次正則でコンパクト台をもつウェーブレットが構成できる．

証明　非負の整数 $r \in \mathbf{Z}_+$ に対し，$s > r + 1$ を満たす $s \in \mathbf{R}$ をとる．補題 9.3.5 で決まる自然数 $k_0 \in \mathbf{N}$ を k として，三角多項式 g を (9.7) で定義する．この g は補題 9.3.5 より，条件 9.3.1 を満たすから，補題 9.3.1 により，コンパクト台をもつ r 次正則スケーリング関数 φ が構成できる．定理 7.1.2 を使えば，(7.1) により r 次正則ウェーブレット ψ が定義できる．ψ は (7.3) を満たすが，m_0 が三角多項式であることから，(7.3) の和は有限和になる．したがって，φ がコンパクト台をもつことより，ψ もコンパクト台をもつ．□

ドベシィのウェーブレットについては，次節で詳しく述べよう．

9.4　ドベシィのコンパクト台をもつウェーブレット

応用上は，ウェーブレットの滑らかさよりもウェーブレットの台の大きさのほうが問題になることが多い．この節では，台の大きさに焦点をあててドベシィのコンパクト台をもつウェーブレットを考える．

自然数 $k \in \mathbf{N}$ に対し，$J_k(v) := \int_{-1}^{v}(1-u^2)^k\,du$ とおく．$I_k(\pi) = J_k(1)$ だから，

$$g(\xi) = J_k(1)^{-1}\int_{\xi}^{\pi}(\sin t)^{2k+1}\,dt = J_k(\cos\xi)/J_k(1)$$

とかける．部分積分を繰り返すことにより，

$$\begin{aligned} J_k(v) &= (k!)^2\int_{-1}^{v}\frac{1}{k!}(1+u)^k\frac{1}{k!}(1-u)^k\,du \\ &= (k!)^2\left[\frac{1}{(k+1)!}(1+u)^{k+1}\frac{1}{k!}(1-u)^k\right]_{-1}^{v} \\ &\quad +(k!)^2\int_{-1}^{v}\frac{1}{(k+1)!}(1+u)^{k+1}\frac{1}{(k-1)!}(1-u)^{k-1}\,du \\ &= \frac{(k!)^2}{(2k+1)!}(1+v)^{k+1}\sum_{\ell=0}^{k}{}_{2k+1}C_\ell\,(1+v)^{k-\ell}(1-v)^\ell \end{aligned}$$

を得る．$L := 2k+1$ とおく．$J_k(1) = 2^{2k+1}(k!)^2/(2k+1)!$ だから，

$$g(\xi) = 2^{-L}(1+v)^{k+1}\sum_{\ell=0}^{k}{}_LC_\ell\,(1+v)^{k-\ell}(1-v)^\ell\Big|_{v=\cos\xi} \tag{9.8}$$

とかける．$g(\xi)$ を z 領域で表現してみよう．$\cos\xi = (z+z^{-1})/2$ だから，$J_k(v)/J_k(1)$ に $1+v = z^{-1}(z+1)^2/2,\ 1-v = -z^{-1}(z-1)^2/2$ を代入した式を $\widetilde{g}(z)$ とおくと，

$$\widetilde{g}(z) = 2^{-2L}z^{-(k+1)}(z+1)^{2(k+1)}z^{-k}\sum_{\ell=0}^{k}(-1)^\ell{}_LC_\ell\,(z+1)^{2(k-\ell)}(z-1)^{2\ell}$$

となる．$\widetilde{g}(z)$ は $g(\xi)$ を z 領域で表現した式である．

定理 9.3.1 のドベシィのコンパクト台をもつスケーリング関数を構成法を具体的に確かめてみよう．ドベシィの記法にあわせるために $N := k+1$ とおく．N に対するフィルタを ${}_Nm_0(\xi)$ とかき，${}_Nm_0$ を z 領域で表現したローラン多項式を $H_N(z)$ とかく．

$$\begin{aligned} p_N(z) &:= z^{-N}(z+1)^{2N} \\ q_N(z) &:= z^{-(N-1)}\sum_{\ell=0}^{N-1}(-1)^\ell{}_LC_\ell\,(z+1)^{2(N-1-\ell)}(z-1)^{2\ell} \end{aligned}$$

とおくと，p_N と q_N は実係数のローラン多項式であって，$\widetilde{g}(z) = 2^{-2L} p_N(z) q_N(z)$ である．

補題 9.4.1　$N \geq 2$ とする．補題 9.2.1 によって得られる $q_N(z)$ の実係数のスペクトル因子分解を $Q_N(z)$ とおくと，$H_N(z) = 2^{-(2N-1)} z^{-N} (z+1)^N Q_N(z)$ である．ただし，$Q_N(z)$ は $H_N(1) = 1$ となるように ± 1 倍を調節する．

証明　(9.8) にもどれば，$z = e^{i\xi}$ に対し，$p_N(e^{i\xi}) \geq 0$ かつ $q_N(e^{i\xi}) \geq 0$ であることがわかる．したがって，補題 9.2.1 を $p_N(z)$ と $q_N(z)$ に適用できる．$P_N(z) := z^{-N}(z+1)^N$ とおくと，$p_N(e^{i\xi}) = |P_N(e^{i\xi})|^2$ であるから，$H_N(z) = 2^{-(2N-1)} P_N(z) Q_N(z)$ である．□

$q_N(z)$ に補題 9.2.1 を適用するためには，$q_N(z)$ の零点を求めなければならない．$z^{N-1} q_N(z) = 0$ は $2(N-1)$ 次代数方程式だから，一般には数値計算によって求めることになる．数値計算をするときには，$J_{N-1}(v) = 0$ の解を求めるほうがよい．v に関する $N-1$ 次代数方程式を解けばよいからである．この解 v に対し，方程式 $v = (z + z^{-1})/2$ より $q_N(z)$ の零点が求められるが，この方程式は z に関する 2 次方程式 $z^2 - 2vz + 1 = 0$ に帰着できるので簡単に解ける．

例 9.4.1　$q_2(z) = 2z^{-1}(-z^2 + 4z - 1)$, $q_3(z) = 2z^{-2}(3z^4 - 18z^3 + 38z^2 - 18z + 3)$, $q_4(z) = 4z^{-3}(-5z^6 + 40z^5 - 131z^4 + 208z^3 - 131z^2 + 40z - 5)$

例 9.4.2　$J_1(v)/J_1(1) = 2^{-2}(1+v)^2(-v+2)$, $J_2(v)/J_2(1) = 2^{-4}(1+v)^3(3v^2 - 9v + 8)$, $J_3(v)/J_3(1) = 2^{-5}(1+v)^4(-5v^3 + 20v^2 - 29v + 16)$

例 9.4.3　$J_1(v) = 0$ の $v = -1$ 以外の解は $v = 2$ である．$J_2(v) = 0$ の $v = -1$ 以外の解は $v = 3/2 \mp i\sqrt{15}/6$ である．$J_3(v) = 0$ の $v = -1$ 以外の解は $1.15762 - 0.747861\,i$, $1.15762 + 0.747861\,i$, 1.68477 である．

例 9.4.4　$q_2(z)$ の零点は $2 \pm \sqrt{3}$ つまり 3.73205, 0.267949 である．$q_3(z)$ の零点を複号同順で表すと，$\alpha_\pm := 3/2 \pm i\sqrt{15}/6 - \{5/6 \pm i\sqrt{15}/2\}^{1/2}$, $\beta_\pm := 3/2 \pm i\sqrt{15}/6 + \{5/6 \pm i\sqrt{15}/2\}^{1/2}$ つまり $0.287251 \pm 0.152892\,i$, $2.71275 \pm 1.44389\,i$ である．$\alpha_\pm \beta_\pm = 1$（複号同順）が成り立つ．絶対値は，$|\alpha_\pm| = 0.325407$, $|\beta_\pm| = 3.07308$ である．$q_4(z)$ の零点は 0.328876, $0.284096 \pm 0.243228\,i$, $2.03114 \pm 1.73895\,i$, 3.04066 である．絶対値は順に，0.328876, 0.373993, 2.67385, 3.04066 である．

例 9.4.5　$H_2(z)$ を求めよう．$q_2(z) = 2(2+\sqrt{3})\,z^{-1}\{z-(2-\sqrt{3})\}\{1-(2-\sqrt{3})z\}$ であるから，$Q_2(1) > 0$ となるように符号を選んで，$Q_2(z) = \{2(2+\sqrt{3})\}^{1/2}\,z^{-1}\{z-(2-\sqrt{3})\}$ となる．補題 9.4.1 により，$H_2(z) = 2^{-3}\{2(2+\sqrt{3})\}^{1/2}\,z^{-3}(z+1)^2\{z-(2-\sqrt{3})\}$ である．数値計算すると $H_2(z) = 0.341506+0.591506z^{-1}+0.158494z^{-2}-0.0915064z^{-3}$ である．

例 9.4.6　$H_3(z)$ を求めよう．$\alpha := \alpha_+$ とおくと $\alpha_- = \overline{\alpha}$ となり，$\beta := \beta_+$ とおくと $\alpha\beta = 1$, $\beta_- = \overline{\beta}$ となることに注意すると，$q_3(z) = 6\,z^{-2}(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})(z-\beta)(z-\overline{\beta}) = 6|\beta|^2\,z^{-2}(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})(1-z\alpha)(1-z\overline{\alpha})$ であるから，$Q_3(1) > 0$ となるように符号を選んで，$Q_3(z) = \sqrt{6}\,|\beta|\,z^{-2}(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})$ となる．補題 9.4.1 により，$H_3(z) = 2^{-5}\sqrt{6}\,|\beta|\,z^{-5}(z+1)^3(z-\alpha)(z-\overline{\alpha})$ である．数値計算すると $H_3(z) = 0.235234+0.570558z^{-1}+0.325183z^{-2}-0.0954672z^{-3}-0.0604161z^{-4}+0.0249087z^{-5}$ である．

自然数 $N \geq 2$ に対し，$H_N(z) := \sum_{0\leq k\leq 2N-1}\,{}_Nh_k\,z^{-k}$ とかく．

定理 9.4.1　$N \geq 2$ とする．補題 9.4.1 で与えた $H_N(z)$ を使って構成するドベシィのスケーリング関数 ${}_N\varphi$ は，$\operatorname{supp}{}_N\varphi \subset [0, 2N-1]$ を満たす．このスケーリング関数 ${}_N\varphi$ から

$$
{}_N\psi(x) = 2\sum_{k\in\mathbf{Z}}(-1)^k\,{}_Nh_{1-k}\,{}_N\varphi(2x-k) \tag{9.9}
$$

によって構成するドベシィのウェーブレット ${}_N\psi$ は，$\operatorname{supp}{}_N\psi \subset [-N+1, N]$ を満たし，$N-1$ 次までのバニシングモーメントをもつ．

証明　補題 9.1.1 の証明を見直してみよう．$j \in \mathbf{Z}_+$ に対し，$\mathcal{F}^{-1}[{}_Nm_0(2^{-j}\xi)] = \sum_{0\leq k\leq 2N-1}\,{}_Nh_k\,\delta(x-2^{-j}k)$ が成り立つ．$I_j := [0, 2^{-j}(2N-1)]$ とおくと，$\operatorname{supp}\delta(x-2^{-j}k) = \{2^{-j}k\}$ だから，$\operatorname{supp}\mathcal{F}^{-1}[{}_Nm_0(2^{-j}\xi)] \subset I_j$ である．したがって，$\operatorname{supp}{}_N\varphi \subset I_0 = [0, 2N-1]$ である．実係数のフィルタ ${}_Nm_0$ に対し，ウェーブレット方程式 (8.6) で ${}_Nm_1(\xi) := -e^{-i\xi}\,\overline{{}_Nm_0(\xi+\pi)}$ とおく構成法が (9.9) である．このとき，$\operatorname{supp}{}_N\varphi(2x-k) \subset [k/2, N+(k-1)/2]$ であり，(9.9) で係数 ${}_Nh_{1-k}$ が 0 にならない k は $-2(N-1) \leq k \leq 1$ を満たすことから，$\operatorname{supp}{}_N\psi \subset [-2(N-1)/2, N+(1-1)/2] = [-N+1, N]$ が成り立つ．ウェーブレット方程式 (8.6) を周波数領域で表現すると，$\widehat{{}_N\psi}(2\xi) = \overline{{}_Nm_0(\xi+\pi)}\{-e^{-i\xi}\,\widehat{{}_N\varphi}(\xi)\}$ とかける．$J := \{0, \ldots, N-1\}$ とおく．補題 9.4.1 より，${}_Nm_0(\xi) = 2^{-(2N-1)}e^{-iN\xi}(e^{i\xi}+1)^N Q_N(e^{i\xi})$ であるから，$\ell \in J$ に対し，${}_Nm_0^{(\ell)}(\pi) = 0$ が成り立つ．${}_N\varphi$ がコンパクト台をもつから，特に $\widehat{{}_N\varphi} \in C^\infty(\mathbf{R})$ と

なり，$\ell \in J$ に対し，$\widehat{{}_N\varphi}^{(\ell)}(0) = 0$ である．(7.4) より ${}_N\psi$ は $N-1$ 次までのバニシングモーメントをもつ．□

ドベシィのウェーブレットが $N-1$ 次までのバニシングモーメントをもつことは，あるローラン多項式 $Q_N(z)$ があって，ローパスフィルタ $H_N(z)$ が $H_N(z) = 2^{-(N-1)}\{(1+z^{-1})/2\}^N Q_N(z)$ とかけること，つまり $\{(1+z^{-1})/2\}^N$ を因数にもつことから導かれていることに注意しよう．一般に，ある自然数 $p \in \mathbf{N}$ があって，ローパスフィルタ $H(z)$ が $\{(1+z^{-1})/2\}^p$ を因数にもつとき，$H(z)$ の**精度**は p であるという．

定理 9.3.1 で構成したドベシィのコンパクト台をもつウェーブレット ${}_N\varphi$ の正則性とパラメータ N との関係を詳しく調べるためには，正則性を測るより細かい尺度が必要である．

定義 9.4.1 連続関数 $f \in C^0(\mathbf{R})$ に対し，ある 1 より小さい正数 $\alpha > 0$ があって，任意のコンパクト集合 $K \subset \mathbf{R}$ に対し，

$$\sup_{x \neq y;\, x,y \in K} |f(x) - f(y)|/|x-y|^\alpha < +\infty$$

が成り立つとき，f は α 次**ヘルダー連続**であるという．関数 $f \in C^r(\mathbf{R})$（$r \in \mathbf{Z}_+$）に対し，$f^{(r)}$ が α 次ヘルダー連続であるとき，$f \in C^{r+\alpha}(\mathbf{R})$ とかく．

ドベシィのウェーブレットのパラメータ N と正則性の関係については詳しい研究があって，たとえば，${}_2\varphi, {}_2\psi \in C^{0.5500}$，${}_3\varphi, {}_3\psi \in C^{1.0878}$，${}_7\varphi, {}_7\psi \in C^{2.158}$ であることが知られている．また，十分大きな N に対し，ある関数 $r(N)$ があって，${}_N\varphi, {}_N\psi \in C^{r(N)}$ を満たし，$\lim_{N\to+\infty} N^{-1} r(N) = 1 - (\log 3)/(2\log 2) \simeq 0.2075$ であることが知られている．

ここで構成したドベシィのウェーブレットはスペクトル因子分解（補題 9.2.1）でローパスフィルタが最小位相をもつように選んでいる．これは，単位インパルスを入力したときの出力がローパスフィルタを決める数列 h であることを考えれば，最小位相をもつフィルタのエネルギー集中性より，台が最小になるように選んでいるといえる．もちろん，最小位相でない分解を考えることにより，違った性質をもつコンパクト台をもつウェーブレットが構成できる．関数がなるべく対称に近くなるようにスペクトル因子分解した場合に得られるウェーブレットを**シムレット**という．

初めに与えた関数 $g(\xi)$ をうまく取り替えることにより，スケーリング関数がコンパクト台をもち，かつ 1 次から $N-1$ 次までのバニシングモーメントをもつように

できることが知られている．このスケーリング関数から構成されるウェーブレットは $N-1$ 次までのバニシングモーメントをもち，**コアフレット**と呼ばれる．詳しくは [13] をみよ．

9.5　カスケードアルゴリズム

ドベシィのスケーリング関数は定理 9.3.1 の証明では周波数領域で無限乗積によって定義した．時間領域では，カスケードアルゴリズムにより伸張方程式の不動点として定義できる．いずれにしても，何らかの極限として与えられることに注意しよう．このような何らかの極限で与えられる関数の各点での値はどのように具体的に計算できるのであろうか．あるいはもっと端的に

- ドベシィのスケーリング関数とウェーブレットのグラフはどのようにしたら描けるのか．

という問題が考えられる．

補題 9.5.1　関数 $\phi \in L^1(\mathbf{R})$ はコンパクト台をもち，$\int \phi(x)\,dx = 1$ を満たすとする．正数 $\varepsilon > 0$ に対し，$\phi_\varepsilon(x) := \varepsilon^{-1}\phi(x/\varepsilon)$ とおく．このとき，関数 $f \in C^0(\mathbf{R})$ に対し，

$$\lim_{\varepsilon \to +0} \int f(x+y)\overline{\phi_\varepsilon(y)}\,dy = f(x) \tag{9.10}$$

が成り立つ．さらに，関数 f が α 次ヘルダー連続であるとき，正数 $C > 0$ があって，任意の $\varepsilon > 0$ に対し，

$$\left|f(x) - \int f(x+y)\overline{\phi_\varepsilon(y)}\,dy\right| \le C\varepsilon^\alpha \tag{9.11}$$

が成り立つ．

証明　正数 $L > 0$ があって，$\operatorname{supp}\phi \subset [-L, L]$ が成り立つ．

$$\begin{aligned}
&\left|f(x) - \int f(x+y)\overline{\phi_\varepsilon(y)}\,dy\right| \\
=\ & \left|\int \{f(x) - f(x+y)\}\overline{\phi_\varepsilon(y)}\,dy\right| \ = \ \left|\int \{f(x) - f(x+\varepsilon z)\}\overline{\phi(z)}\,dz\right| \\
\le\ & \sup_{|u| \le \varepsilon L} |f(x) - f(x+u)| \int_{[-L,L]} |\phi(z)|\,dz
\end{aligned}$$

より，f が連続なら (9.10) が成り立ち，f が α 次ヘルダー連続なら，正数 $C' > 0$ があって，$\sup_{|u|\le\varepsilon L}|f(x)-f(x+u)| \le \sup_{|u|\le\varepsilon L} C'|u|^\alpha \le C'L^\alpha\varepsilon^\alpha$ であることより，$C := C'L^\alpha\int|\phi(z)|\,dz$ として，(9.11) が成り立つ．□

コンパクト台をもつ α 次ヘルダー連続なスケーリング関数 φ を考えよう．補題 9.5.1 で $\phi = f = \varphi$, $\varepsilon = 2^{-j}$ ($j \in \mathbf{Z}_+$) とおき，任意の 2 進有理数 x における φ の値を調べよう．ここで x が **2 進有理数**であるとは，ある整数 $J, K \in \mathbf{Z}$ があって，$x = 2^{-J}K$ とかけるときをいう．$x = 2^{-J}K$ としよう．$j \ge J$ ならば $2^{j-J}K \in \mathbf{Z}$ であるから，(9.10) より，(8.10) の記号法を使えば，

$$
\begin{aligned}
\varphi(2^{-J}K) &= \lim\nolimits_{j\to+\infty} 2^j \int \varphi(2^{-J}K+y)\overline{\varphi(2^j y)}\,dy \\
&= \lim\nolimits_{j\to+\infty} 2^{j/2}(\varphi, \varphi_{j,2^{j-J}K}) \;=\; \lim\nolimits_{j\to+\infty} S_{j,2^{j-J}K}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．さらに，(9.11) より，正数 $C > 0$ があって，$j \ge J$ ($j \in \mathbf{Z}_+$) ならば，

$$
|\varphi(2^{-J}K) - S_{j,2^{j-J}K}| \le C2^{-j\alpha} \tag{9.12}
$$

が成り立つ．この定数 C は $f = \varphi$ がコンパクト台をもつことより，x に依存しないようにとれることに注意しよう．$\varphi(2^{-J}K)$ の値を知るには，$S_{j,2^{j-J}K}$ を計算すればよい．

補題 9.5.2　数列 $\{h_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ をスケーリング関数 φ から (9.1) で決まるフィルタであるとする．整数 $j \in \mathbf{Z}_+$, $k \in \mathbf{Z}$ に対し，$\{S_{j,k} := 2^{j/2}(\varphi, \varphi_{jk})\}$ は，初期値を $\{S_{0,k} := \delta_{0,k}\}$ とし，高速ウェーブレット変換アルゴリズム：

$$
S_{j+1,k} = 2\sum\nolimits_{n\in\mathbf{Z}} h_{k-2n}\,S_{j,n} \tag{9.13}
$$

により逐次計算できる．

証明　$L^2(\mathbf{R}) = \overline{V_0 \oplus \left(\oplus_{j\in\mathbf{Z}_+} W_j\right)}$ より，$\{\varphi_{0k}\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \{\psi_{jk}\}_{j\in\mathbf{Z}_+,k\in\mathbf{Z}}$ が $L^2(\mathbf{R})$ の正規直交基底になるから，関数 φ をこの基底で展開してみると，

$$
\begin{aligned}
\varphi &= \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} (\varphi, \varphi_{0k})\varphi_{0k} + \sum\nolimits_{j\in\mathbf{Z}_+,k\in\mathbf{Z}} (\varphi, \psi_{jk})\psi_{jk} \\
&= \sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}} S_{0,k}\,\varphi_{0k} + \sum\nolimits_{j\in\mathbf{Z}_+,k\in\mathbf{Z}} 2^{-j/2}D_{j,k}\,\psi_{jk}
\end{aligned}
$$

が成り立つ．関数 $\varphi = \varphi_{00}$ は正規直交基底をなす関数のひとつだから，$k \in \mathbf{Z}$ に対し，$S_{0,k} = \delta_{0,k}$ であり，$j \in \mathbf{Z}_+, k \in \mathbf{Z}$ に対し，$D_{j,k} = 0$ である．高速ウェーブレット変換アルゴリズム (8.17) にこれらの値を代入すればよい．□

非負の整数 $j \in \mathbf{Z}_+$ に対し，連続関数 $\eta_j(x)$ を閉区間 $[2^{-j}k, 2^{-j}(k+1)]$（$k \in \mathbf{Z}$）上で 1 次式：$\eta_j(x) := \{1-(2^j x - k)\}S_{j,k-1} + (2^j x - k)S_{j,k}$ で定義される折れ線が作る連続関数とする．このとき，$\eta_j(2^{-j}k) = S_{j,k-1}$ であることに注意しよう．特に，$S_{j,-1} = 0$ なら $\eta_j(0) = 0$ である．

補題 9.5.3 コンパクト台をもつ α 次ヘルダー連続なスケーリング関数 φ に対し，ある正数 $C > 0$ があって，$j \in \mathbf{Z}_+$ に対し，$\sup_{x \in \mathbf{R}} |\varphi(x) - \eta_j(x)| \le C2^{-j\alpha}$ が成り立つ．

証明 任意に $x \in \mathbf{R}$ を選び固定しよう．任意の $j \in \mathbf{Z}_+$ に対し，ある $n \in \mathbf{Z}$ があって，$x \in [2^{-j}n, 2^{-j}(n+1))$ である．φ がコンパクト台をもつ α 次ヘルダー連続関数であることと，(9.12) で $j = J$ とおいた評価式を使うと，x によらないある正数 $C', C'' > 0$ があって，

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - S_{j,n-1}| &\le |\varphi(x) - \varphi(2^{-j}(n-1))| + |\varphi(2^{-j}(n-1)) - S_{j,n-1}| \\ &\le C'|x - 2^{-j}(n-1)|^\alpha + C''2^{-j\alpha} \ \le \ (2^\alpha C' + C'')2^{-j\alpha} \end{aligned}$$

が成り立つ．同様にして，$|\varphi(x) - S_{j,n}| \le (C' + C'')2^{-j\alpha}$ が成り立つ．$t := 2^j x - n$ とおくと，$0 \le t \le 1$ である．η_j の定義から，閉区間 $[2^{-j}n, 2^{-j}(n+1)]$ 上で $\eta_j = (1-t)S_{j,n-1} + tS_{j,n}$ であるから，$C := 2^\alpha C' + C''$ とおくと，

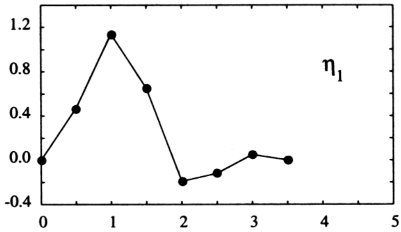
$$\begin{aligned} |\varphi(x) - \eta_j(x)| &\le (1-t)|\varphi(x) - S_{j,n-1}| + t|\varphi(x) - S_{j,n}| \\ &\le (1-t)C2^{-j\alpha} + tC2^{-j\alpha} \ = \ C2^{-j\alpha} \end{aligned}$$

が成り立つ．定数 C が x によらないことに注意すればよい．□

スケーリング関数のグラフが得られれば，ウェーブレット方程式 (8.6) を使ってウェーブレットのグラフを描くことができる．フィルタ $g_k = (-1)^k \overline{h_{1-k}}$ に対し，$\zeta_j(x) := 2\sum_{k \in \mathbf{Z}} g_k \eta_{j-1}(2x - k)$, $j \in \mathbf{N}$ とおく．このとき，整数 $n \in \mathbf{Z}$ に対し，$\eta_{j-1}\left(2^{-(j-1)}(n - 2^{j-1}k)\right) = S_{j-1, n-2^{j-1}k-1}$ であるから，

$$\zeta_j(2^{-j}n) = 2\sum_{k \in \mathbf{Z}} g_k S_{j-1, n-2^{j-1}k-1} \tag{9.14}$$

が成り立つ．$\eta_{j-1}(2x)$ は閉区間 $[2^{-j}n, 2^{-j}(n+1)]$（$n \in \mathbf{Z}$）上に制限すれば 1 次関数であるから，$\eta_{j-1}(2x)$ を $k/2$ だけ平行移動した関数の線形結合で定義される $\zeta_j(x)$ も閉区間 $[2^{-j}n, 2^{-j}(n+1)]$（$n \in \mathbf{Z}$）上に制限すれば 1 次関数である．したがって，$\zeta_j(x)$ のグラフは座標平面上に点 $\left(2^{-j}n, \zeta_j(2^{-j}n)\right)$（$n \in \mathbf{Z}$）をとり，隣り合う 2 点を線分で結んで得られる折れ線グラフである．



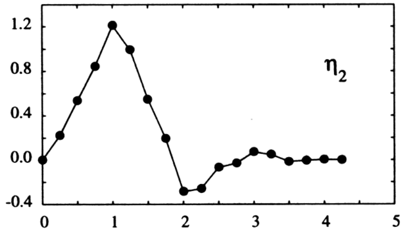


図 9.1　$\eta_1(x)$ と $\eta_2(x)$ のグラフ（$N=3$）

補題 9.5.4　コンパクト台をもつ α 次ヘルダー連続なスケーリング関数 φ に対し，ウェーブレット ψ をウェーブレット方程式 (8.6) で定義する．このとき，ある正数 $C>0$ があって，$j\in\mathbf{N}$ に対し，$\sup_{x\in\mathbf{R}}|\psi(x)-\zeta_j(x)|\le C2^{-j\alpha}$ が成り立つ．

証明　補題 9.5.3 より，ある正数 $C'>0$ があって，

$$\begin{aligned}|\psi(x)-\zeta_j(x)| &\le 2\sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}}|g_k|\,|\varphi(2x-k)-\eta_{j-1}(2x-k)|\\ &\le 2\sum\nolimits_{k\in\mathbf{Z}}|g_k|\,C'2^{-(j-1)\alpha}\end{aligned}$$

が成り立つ．フィルタ $\{g_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は有限インパルス応答だから，$C:=C'2^{\alpha+1}\sum_{k\in\mathbf{Z}}|g_k|$ とおけばよい．□

例 9.5.1　$N=3$ のときのドベシィのスケーリング関数とウェーブレットのグラフを描いてみよう．例 9.4.6 で求めたように $h_0=0.235234$, $h_1=0.570558$, $h_2=0.325183$, $h_3=-0.0954672$, $h_4=-0.0604161$, $h_5=0.0249087$ である．その他の $k\in\mathbf{Z}\backslash\{0,1,2,3,4,5\}$ に対しては，$h_k=0$ とする．補題 9.5.2 より，$S_{1,k}=2\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_{k-2n}\,\delta_{0,n}=2h_k$ である．$\{S_{1,k}\}=(\ldots,0,2h_0,2h_1,\ldots,2h_5,0,\ldots)$ とかく．座標平面上に点 $(2^{-1}k,S_{1,k-1})$（$k=0,\ldots,6$）をとり，折れ線でつなぐと $\eta_1(x)$ のグラフ（図 9.1）ができる．図 9.1 では 0 となるところは省略してある．同様に $S_{2,k}=2\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_{k-2n}\,S_{1,n}=2^2\sum_{n\in\mathbf{Z}}h_{k-2n}h_n$ である．$S_{2,k}$ を計算するには，まず $\{S_{1,k}\}$ にアップサンプリング $(\uparrow 2)$ を作用させる．原点 $2h_0$ の位置を変えずに，数列 $\{S_{1,k}\}$ の各項の間に 0 を挿入すればよい．$(\uparrow 2)\{S_{1,k}\}=(\ldots,0,2h_0,0,2h_1,0,\ldots,0,2h_5,0,\ldots)$ である．次にデジタルフィルタ $2m_0$ を作用させるために数列 $2h:=\{2h_k\}$ を原点 $2h_0$ に関してひっくり返した数列 $\mathrm{Flip}2h:=(\ldots,0,2h_5,2h_4,\ldots,2h_0,0,\ldots)$ を考える．

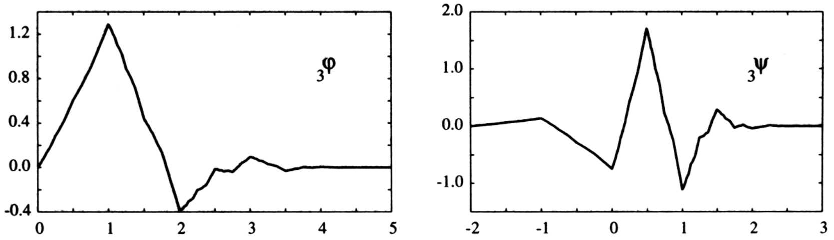


図 9.2　カスケードアルゴリズムによるドベシィのスケーリング関数とウェーブレット($N = 3$)

数列 Flip2h と数列 $(\uparrow 2)\{S_{1,k}\}$ との内積を計算すれば，数列 $2h$ と数列 $(\uparrow 2)\{S_{1,k}\}$ との合成積 $S_{2,0}$ を計算したことになる．$S_{2,0} = 2^2 h_0^2$ である．シフト作用素を S とかくと，$S_{2,k}$ は数列 $S^k(\mathrm{Flip}2h)$ と数列 $(\uparrow 2)\{S_{1,k}\}$ との内積を計算すればよい．数列 Flip2h の座標成分を右にひとつ移動して数列 $(\uparrow 2)\{S_{1,k}\}$ との内積を計算すると，$S_{2,1} = 2^2 h_1 h_0$ である．順に右にひとつ移動して内積を計算すると，内積が 0 でない最大の k は $k = 15$ であり，$S_{2,15} = 2^2 h_5^2$ である．$\{2^{-2} S_{2,k}\}_{k=0,\ldots,15} = (h_0^2,\ h_0h_1,\ h_0h_1 + h_0h_2,\ h_1^2 + h_0h_3,\ h_0h_2 + h_1h_2 + h_0h_4,\ h_1h_2 + h_1h_3 + h_0h_5,\ h_2^2 + h_0h_3 + h_1h_4,\ h_1h_3 + h_2h_3 + h_1h_5,\ h_2h_3 + h_0h_4 + h_2h_4,\ h_3^2 + h_1h_4 + h_2h_5,\ h_2h_4 + h_3h_4 + h_0h_5,\ h_3h_4 + h_1h_5 + h_3h_5,\ h_4^2 + h_2h_5,\ h_3h_5 + h_4h_5,\ h_4h_5,\ h_5^2)$ であり，$S_{2,-1} = 0$, $S_{2,16} = 0$ をつけ加えて数値計算した結果は，$\{S_{2,k-1}\}_{k=0,\ldots,17} = (0,\ 0.2213,\ 0.5369,\ 0.8428,\ 1.2123,\ 0.9913,\ 0.5477,\ 0.1953,\ -0.2852,\ -0.2596,\ -0.0690,\ -0.0321,\ 0.0704,\ 0.0470,\ -0.0155,\ -0.0060,\ 0.0025,\ 0)$ である．座標平面上に点 $(2^{-2}k, S_{2,k-1})$ $(k = 0, \ldots, 17)$ をとり，折れ線でつなぐと $\eta_2(x)$ のグラフ（図 9.1）ができる．$\zeta_j(x)$ $(j \in \mathbf{N})$ のグラフは，ウェーブレット方程式 (9.9) より，(9.14) が $\zeta_j(2^{-j}n) = 2\sum_{\ell=0}^{5}(-1)^{1-\ell} h_\ell S_{j-1,n+2^{j-1}(\ell-1)-1}$ とかけることに注意すればよい．$j = 10$ として得られたグラフが図 9.2 である．

ドベシィのスケーリング関数が周波数領域では無限乗積によって定義できることを使うと，ドベシィのスケーリング関数とウェーブレットのフーリエ像のグラフを描くことができる．

例 9.5.2　$N = 3$ のときのドベシィのスケーリング関数とウェーブレットのフーリエ像のグラフを描いてみよう．例 9.4.6 で求めたように $H_3(z) = 0.235234 + 0.570558z^{-1} + 0.325183z^{-2} - 0.0954672z^{-3} - 0.0604161z^{-4} + 0.0249087z^{-5}$ であるから，$z = e^{i\xi}$

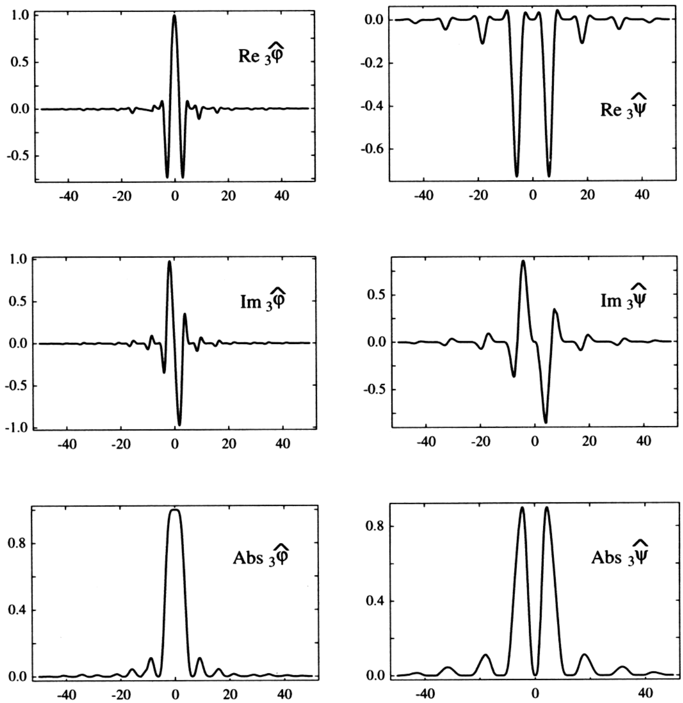


図 9.3　ドベシィのスケーリング関数とウェーブレットフーリエ像 ($N=3$)

つまり $z^{-1}=\cos\xi - i\sin\xi$ を代入して ${}_3m_0(\xi)$ を得る．${}_3m_0(\xi)$ は $\cos\xi$ と $\sin\xi$ に関する 5 次の多項式であるから，無限乗積 $\prod_{j=1}^{+\infty} {}_3m_0(2^{-j}\xi)$ の初めの有限個の積を計算することは可能である．たとえば初めの 10 個の積を $\prod_{j=1}^{10} {}_3m_0(2^{-j}\xi)$ を数値計算してこれを $\widehat{{}_3\varphi}$ とし，$\widehat{{}_3\psi}$ は (8.5) で ${}_3m_1(\xi) := -e^{-i\xi}\,\overline{{}_3m_0(\xi+\pi)}$ とおいて数値計算して得られたグラフが図 9.3 である．$\widehat{{}_3\varphi}$ と $\widehat{{}_3\psi}$ は複素数値関数になるので，図ではそれぞれの関数の実部（Re）と虚部（Im）と絶対値（Abs）をグラフにしてある．

9.6　スケーリング関数とウェーブレットの時間周波数の窓

スケーリング関数とウェーブレットを窓関数としてみた場合の時間周波数の窓を考えよう．

関数 $w(x)$ が窓関数であるとき，$w(x)$ の中心を x_w^*，幅を Δ_w とかき，$\widehat{w}(\xi)$ が窓関数であるとき，$\widehat{w}$ の中心を $\xi_{\widehat{w}}^*$，幅を $\Delta_{\widehat{w}}$ とかく．

補題 9.6.1 関数 $w(x)$ に対し，$\widehat{w}(\xi)$ が窓関数であるとする．このとき，$w(x)$ が実数値関数であるなら，$\xi_{\widehat{w}}^* = 0$ である．

証明 $w(x)$ が実数値関数であることから，$\overline{\widehat{w}(\xi)} = \widehat{w}(-\xi)$ となり，$|\widehat{w}(\xi)|^2 = \widehat{w}(\xi)\widehat{w}(-\xi)$ が成り立つ．したがって，$|\widehat{w}(\xi)|^2$ は偶関数であり，$\xi|\widehat{w}(\xi)|^2$ は奇関数となる．$\widehat{w}(\xi)$ が窓関数であるから，$\xi|\widehat{w}(\xi)|^2$ は $\mathbf{R}$ 上可積分となり，奇関数の $\mathbf{R}$ 上の積分は 0 であることに注意すればよい．□

補題 9.6.2 関数 φ はスケーリング関数であり，関数 ψ はスケーリング関数 φ から (8.6) で決まるウェーブレットであるとする．このとき，$\widehat{\varphi}$ が窓関数であるなら，$\widehat{\psi}$ も窓関数であり，$\xi_{\widehat{\psi}}^* = 3\xi_{\widehat{\varphi}}^*$ が成り立つ．

証明 補題 5.6.5 の行列 $M(\xi)$ のユニタリ性：$|m_0(\xi)|^2 + |m_1(\xi)|^2 \equiv 1$ に $|\widehat{\varphi}(\xi)|^2$ をかけて (8.1) と (8.5) を使い，ξ を $\xi/2$ とおくと，

$$|\widehat{\psi}(\xi)|^2 = |\widehat{\varphi}(\xi/2)|^2 - |\widehat{\varphi}(\xi)|^2 \tag{9.15}$$

を得る．(9.15) に ξ^2 をかけて $\mathbf{R}$ 上積分すると，$\int \xi^2|\widehat{\varphi}(\xi/2)|^2\,d\xi = 2^3 \int \eta^2|\widehat{\varphi}(\eta)|^2\,d\eta$ であるから，

$$\int \xi^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi = (2^3 - 1)\int \eta^2|\widehat{\varphi}(\eta)|^2\,d\eta \tag{9.16}$$

が成り立つ．したがって，$\xi\widehat{\varphi}(\xi) \in L^2(\mathbf{R})$ なら $\xi\widehat{\psi}(\xi) \in L^2(\mathbf{R})$ となり，$\widehat{\psi}$ は窓関数である．同様にして，(9.15) に ξ をかけて $\mathbf{R}$ 上積分すると，$\int \xi|\widehat{\psi}(\xi)|^2\,d\xi = (2^2 - 1)\int \eta|\widehat{\varphi}(\eta)|^2\,d\eta$ が成り立つ．$||\varphi|| = ||\psi|| = 1$ より，パーシバルの等式 (5.1) を使って，$||\widehat{\varphi}|| = ||\widehat{\psi}|| = \sqrt{2\pi}$ となるから，窓関数の中心の定義から $\xi_{\widehat{\psi}}^* = 3\xi_{\widehat{\varphi}}^*$ が成り立つ．□

補題 9.6.3 関数 φ は実数値スケーリング関数であり，関数 ψ はスケーリング関数 φ から (8.6) で決まるウェーブレットであるとする．このとき，$\widehat{\varphi}$ が窓関数であるなら，$\xi_{\widehat{\psi}}^* = \xi_{\widehat{\varphi}}^* = 0$ かつ $\Delta_{\widehat{\psi}} = \sqrt{7}\Delta_{\widehat{\varphi}}$ が成り立つ．

証明 関数 $\widehat{\varphi}$ は補題 9.6.1 の仮定を満たすから，$\xi_{\widehat{\varphi}}^* = 0$ である．補題 9.6.2 により，$\widehat{\psi}$ は窓関数であって，$\xi_{\widehat{\psi}}^* = 0$ が成り立つ．等式 (9.16) に注意すればよい．□

表 9.1 ドベシィのスケーリング関数とウェーブレットの中心と幅

N	$(x^*_\varphi, \xi^*_{\widehat{\varphi}})$	$(\Delta_\varphi, \Delta_{\widehat{\varphi}})$	$\Delta_\varphi\Delta_{\widehat{\varphi}}$	$(x^*_\psi, \xi^*_{\widehat{\psi}})$	$(\Delta_\psi, \Delta_{\widehat{\psi}})$	$\Delta_\psi\Delta_{\widehat{\psi}}$
3	(1.02, 0)	(0.36, 2.26)	0.82	(0.50, 0)	(0.42, 5.98)	2.54
4	(1.27, 0)	(0.42, 2.04)	0.85	(0.50, 0)	(0.50, 5.40)	2.70
5	(1.51, 0)	(0.47, 1.96)	0.92	(0.50, 0)	(0.58, 5.18)	2.98
6	(1.74, 0)	(0.52, 1.92)	1.00	(0.50, 0)	(0.65, 5.08)	3.30
7	(1.98, 0)	(0.57, 1.90)	1.09	(0.50, 0)	(0.72, 5.02)	3.64
8	(2.21, 0)	(0.62, 1.89)	1.18	(0.50, 0)	(0.80, 4.99)	3.97
9	(2.44, 0)	(0.67, 1.88)	1.27	(0.50, 0)	(0.87, 4.96)	4.30
10	(2.67, 0)	(0.73, 1.87)	1.36	(0.50, 0)	(0.94, 4.94)	4.63

ドベシィのスケーリング関数の正則性に関する詳しい結果を使うと，$N \geq 3$ ならば ${}_N\varphi$ はコンパクト台をもつ連続的微分可能な関数であるから，${}_N\varphi' \in L^2(\mathbf{R})$ となり，フーリエ像を考えれば $\widehat{{}_N\varphi}$ が窓関数であることが示せる．補題 9.6.3 より，$N \geq 3$ ならば $\xi^*_{\widehat{{}_N\psi}} = \xi^*_{\widehat{{}_N\varphi}} = 0$ かつ $\Delta_{\widehat{{}_N\psi}} = \sqrt{7}\Delta_{\widehat{{}_N\varphi}}$ が成り立つことに注意しよう．

例 9.6.1 ドベシィのスケーリング関数とウェーブレットの時間周波数の窓を数値計算で求めてみよう．補題 9.5.3 と補題 9.5.4 により，φ と ψ の 2 進有理点 $\{2^{-j}k\}_{j\in\mathbf{N},k\in\mathbf{Z}}$ における近似値が与えられているから，φ と ψ の中心と幅は積分をリーマン和で近似する通常の数値積分で求めることができる．表 9.1 では，カスケードアルゴリズムの繰返しの回数を 10 回として数値計算している．$\widehat{\varphi}$ と $\widehat{\psi}$ の中心は 0 であり，幅については $\Delta_{\widehat{{}_N\psi}} = \sqrt{7}\Delta_{\widehat{{}_N\varphi}}$ が成り立つから，$\Delta_{\widehat{{}_N\varphi}}$ を数値計算すればよい．(9.8) を使って，$g(\xi) = |m_0(\xi)|^2$ とかけることに注意しよう．(9.8) を $N = k+1$ として使えば，十分大きな自然数 $j_0 \in \mathbf{N}$ をとれば，$\prod_{j=1}^{j_0} g(2^{-j}\xi)$ は $|\widehat{\varphi}(\xi)|^2$ の近似値を与えるから，$\widehat{\varphi}$ の幅は積分をリーマン和で近似する通常の数値積分で求めることができる．表 9.1 では，$j_0 = 10$ かつ積分区間を $[-50, 50]$ として数値計算している．

第 10 章

ウェーブレットを超えて

10.1 時間周波数解析

信号解析などで考えられている時間周波数解析を数学的に表現すると次のようになる.

定義 10.1.1 関数 $w(x)$ と $\widehat{w}(\xi)$ は窓関数であるとする. 相平面上にある長方形 R があって, R の辺は座標軸に平行であり, w の時間周波数の窓が R に一致するとき, w を R を窓にもつ**時間周波数原子**と呼ぶ. 特に時間周波数の窓 R を明示したいときは w_R とかく. 関数 $f(x)$ を適当な時間周波数原子 $w_{R_k}(x)$ の線形結合を使って, $f(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} \alpha_k w_{R_k}(x)$ と分解することを**時間周波数解析**という.

ウェーブレット展開 (5.15) を時間周波数解析に使うことができるが, $j \to -\infty$ のとき, ψ_{jk} の時間周波数の窓は面積は不変だが時間方向に伸びてしまう. 周波数解析であるフーリエ解析を補う意味では時間について局所化できるほうが望ましい. そこで正規直交基底 $\{\varphi_{0k}\}_{k\in\mathbf{Z}} \cup \{\psi_{jk}\}_{j\in\mathbf{Z}_+, k\in\mathbf{Z}}$ に関する展開：

$$f = \sum_{k\in\mathbf{Z}} (f, \varphi_{0k})\, \varphi_{0k} + \sum_{j\in\mathbf{Z}_+, k\in\mathbf{Z}} (f, \psi_{jk})\, \psi_{jk} \tag{10.1}$$

を考える. この展開 (10.1) も**ウェーブレット展開**と呼ばれる. ウェーブレット展開 (10.1) で使われる正規直交基底をなす関数の時間周波数の窓をタイル張りにして概念的に表現したのが図 10.1 である. ここで使っている関数はドベシィの $N = 3$ のスケーリング関数とウェーブレットであって, 時間周波数の窓は下から順に $j = 0, 1, 2, 3$

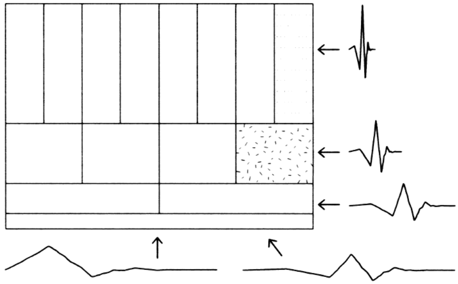


図 10.1　ウェーブレット展開における時間周波数の窓の概念図

に対応する．もちろん，表 9.1 にあるように，スケーリング関数とウェーブレットの時間周波数の窓の中心と大きさは違うのだが，図 10.1 ではスケーリング関数の窓はウェーブレットの窓に含めている．

ウェーブレット展開 (10.1) では時間周波数原子は解析したい関数によらず決まっていて，時間についての解析を重視したため，周波数については詳しく解析できない．しかし，解析したい関数によっては周波数について詳しく解析したい場合もある．そこで次の問題が考えられる．

- 解析したい関数によって時間周波数原子を適当に取り替えて，解析したい関数に応じた時間周波数解析ができないだろうか．

これは正規直交基底を使って解析したい関数を展開する場合には，解析したい関数に応じて正規直交基底を取り替えることを意味する．時間についての解析を重視して取り替えるマルバール（**Malvar**）ウェーブレット [23] や周波数についての解析を重視して取り替えるウェーブレットパケット [29] などが知られている．

10.2　ウェーブレットパケット

ウェーブレットパケットを考えるために伸張方程式 (7.2) とウェーブレット方程式 (8.6) を見直してみよう．

補題 10.2.1　関数 $f \in L^2(\mathbf{R})$ に対し，$\{f(x-k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系であるとする．2 つのデジタルフィルタ $m_0(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k\, e^{-ik\xi}$ と $m_1(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k\, e^{-ik\xi}$ が

共役クワドラチュアフィルタであるとする．このとき，

$$F_0(x) := 2\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k f(2x-k), \quad F_1(x) := 2\sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k f(2x-k)$$

とおくと，任意の $j\in\mathbf{Z}$ に対し，$\{(F_i)_{jk}\}_{i\in\{0,1\},k\in\mathbf{Z}}$ は正規直交系であって，

$$\overline{\mathrm{Span}}\,\{(F_i)_{jk}\}_{i\in\{0,1\},k\in\mathbf{Z}} = \overline{\mathrm{Span}}\,\{f_{j+1,k}\}_{k\in\mathbf{Z}} \tag{10.2}$$

が成り立つ．

証明　共役クワドラチュアフィルタの定義より，補題 5.6.5 の行列 M がすべての $\xi\in\mathbf{T}$ に対し，ユニタリ行列になる．補題 5.6.5 の証明を見直してみよう．(5.19) と (5.17) をそれぞれ $\widehat{F_i}(\xi) = m_i(\xi/2)\widehat{f}(\xi/2)\,(i\in\{0,1\})$ に置き換えて考えれば，$\{F_i(x-k)\}_{i\in\{0,1\},k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系であることがわかり，$x=2^jy$ とおけば $\{(F_i)_{jk}\}_{i\in\{0,1\},k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系であることがわかる．同様に $j=0$ のとき (10.2) を示せばよい．$F_i(x)\,(i\in\{0,1\})$ は定義より $\ell^2(\mathbf{Z})$ の元を係数とする $\{f_{1k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ の線形結合で表せるから，$\{f_{1k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が $\ell^2(\mathbf{Z})$ の元を係数とする $\{(F_i)_{0k}\}_{i\in\{0,1\},k\in\mathbf{Z}}$ の線形結合で表せることを示せば十分であるが，(8.15) と (8.16) を考えれば

$$\begin{aligned} f(2x) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} \overline{h_{2n}}\, F_0(x+n) + \sum_{n\in\mathbf{Z}} \overline{g_{2n}}\, F_1(x+n) \\ f(2x-1) &= \sum_{n\in\mathbf{Z}} \overline{h_{2n+1}}\, F_0(x+n) + \sum_{n\in\mathbf{Z}} \overline{g_{2n+1}}\, F_1(x+n) \end{aligned}$$

となることより明らかであろう．□

系 10.2.1　スケーリング関数 φ とスケーリング関数から決まるウェーブレット ψ が与えられたとする．φ と ψ がそれぞれ満たす伸張方程式とウェーブレット方程式に付随する共役クワドラチュアフィルタが $m_0(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k\, e^{-ik\xi}$ と $m_1(\xi) := \sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k\, e^{-ik\xi}$ であるとする．このとき，

$$\psi^0(x) := 2^{1/2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} h_k\psi(x-k), \quad \psi^1(x) := 2^{1/2}\sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k\psi(x-k)$$

とおくと，$\{\psi^i(x-2k)\}_{i\in\{0,1\},k\in\mathbf{Z}}$ は正規直交系である．$i\in\{0,1\}$ に対し，$W_0^i := \overline{\mathrm{Span}}\,\{\psi^i(x-2k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおくと，$W_0 = W_0^0\oplus W_0^1$ が成り立つ．

証明　$F_i(x) = 2^{1/2}\psi^i(2x)\,(i\in\{0,1\})$ とおくと，$f:=\psi$ として補題 10.2.1 が使えて，$\{(F_i)_{0k}\}_{i\in\{0,1\},k\in\mathbf{Z}}$ が正規直交系であるから，$\{2^{1/2}\psi^i(2x-2k)\}_{i\in\{0,1\},k\in\mathbf{Z}}$ が

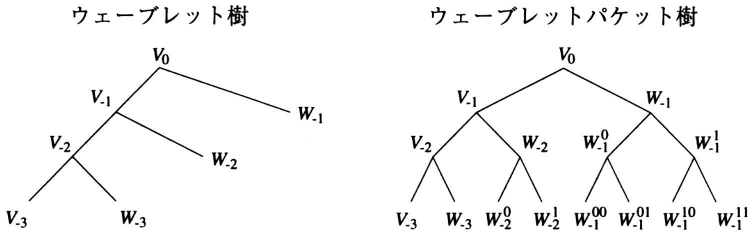


図 10.2　ウェーブレットとウェーブレットパケットの空間の分解の樹系図

x の関数として正規直交系となるが，これは $2x = y$ とおけば $\{\psi^i(y-2k)\}_{i\in\{0,1\},k\in\mathbf{Z}}$ が y の関数として正規直交系であることを意味する．$W_0 = W_0^0 \oplus W_0^1$ は (10.2) で $j = 0$, $2x = y$ とおけばよい．□

このとき，$i \in \{0,1\}$ に対し，$\widehat{\psi^i}(\xi) = 2^{1/2}m_i(\xi)\widehat{\psi}(\xi)$ が成り立つことに注意しよう．これは，m_0 がローパスフィルタであり m_1 がハイパスフィルタであることを考えると，ψ^i ($i \in \{0,1\}$) は ψ より周波数に関して解像度が良くなっていることを意味する．もちろん時間に関しては逆に解像度は悪くなっている．大切なことは，$i \in \{0,1\}$ と $j \in \mathbf{Z}$ に対し，$W_j^i := \overline{\mathrm{Span}}\,\{(\psi^i)_{j,2k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ とおくと，$W_j = W_j^0 \oplus W_j^1$ が成り立つから，必要なら適当な $j \in \mathbf{Z}$ に対し，$\{\psi_{jk}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ のかわりに $\{(\psi^i)_{j,2k}\}_{i\in\{0,1\},k\in\mathbf{Z}}$ を使うことにより，周波数に関して解像度が良い時間周波数解析ができるということである．

補題 10.2.1 を繰返し適用すれば周波数に関してより良い解像度をもつ時間周波数解析ができるであろう．たとえば，W_0 の分解 $W_0 = W_0^0 \oplus W_0^1$ に対し，$f(x) := 2^{1/2}\psi^0(2x)$ とおき，$W_0^0 = \overline{\mathrm{Span}}\,\{2^{1/2}\psi^0(2x-2k)\}_{k\in\mathbf{Z}}$ に補題 10.2.1 を適用して，$W_0^0 = W_0^{00} \oplus W_0^{01}$ とさらに分解するのである．このようにして誕生したのがウェーブレットパケットである．ウェーブレットとウェーブレットパケットとの空間の分解の違いを樹系図で表したものが図 10.2 である．

ウェーブレットパケットは使う関数とスケールの情報を含めた番号付けをうまく行うと考えやすい．番号付けは $\{0,1\}$ のべき集合を使う．

非負の整数 $n \in \mathbf{Z}_+$ は，ある自然数 $N \in \mathbf{N}$ があって，$n = \sum_{j=1}^N \varepsilon_j 2^{j-1}$ ($\varepsilon_j \in \{0,1\}$) とかける．これを n の 2 進展開といい，$n = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_N) \in \{0,1\}^N$ で表わす．この 2 進展開では $\varepsilon_N = \varepsilon_{N-1} = \cdots = 0$ であってもよいとするので表示は一意的ではない．n に対し，N が最小であることを仮定すれば，n は 2 進数として

N 桁，かつ 2 進数表示が $n=\varepsilon_N\cdots\varepsilon_2\varepsilon_1$ となるので 2 進展開表示は一意的である．

定義 10.2.1　コンパクト台をもつスケーリング関数 φ に対し，(8.1) を満たすフィルタを m_0 とし，あるフィルタ m_1 があって，m_0 と m_1 が共役クワドラチュアフィルタであるとする．非負の整数 $n\in\mathbf{Z}_+$ の 2 進展開のひとつを $n=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)$ とする．関数系 $\{w_n(x)\}_{n\in\mathbf{Z}_+}$ を

$$\widehat{w}_n(\xi):=m_{\varepsilon_N}(2^{-1}\xi)\cdots m_{\varepsilon_2}(2^{-N+1}\xi)m_{\varepsilon_1}(2^{-N}\xi)\widehat{\varphi}(2^{-N}\xi) \tag{10.3}$$

で定義する．関数 w_n をスケーリング関数 φ に付随して決まる**基本ウェーブレットパケット**と呼ぶ．

n に対し，N が最小である 2 進展開を考え，関係式 (8.1) を L 回使うと，(10.3) は $\widehat{w}_n(\xi)=\prod_{j=1}^{N+L}m_{\varepsilon_j}(2^{-j}\xi)\widehat{\varphi}(2^{-N-L}\xi)$ とかけることに注意しよう．これは自然な埋込み：$\{0,1\}^N\to\{0,1\}^N\times\{0\}^L\subset\{0,1\}^{N+L}$ による 2 進展開を考えても基本ウェーブレットパケットはかわらないこと，つまり定義が n の 2 進展開表示の選び方によらないことを意味する．このことにより，スケーリング関数を $\widehat{\varphi}(0)=1$ を満たすように選び，$\widehat{w}_n(\xi):=\prod_{j=1}^{+\infty}m_{\varepsilon_j}(2^{-j}\xi)$ と定義する場合もある．

定義より，$w_0=\varphi$ である．$m_1(\xi):=e^{-i\xi}\,\overline{m_0(\xi+\pi)}$ とおく場合には，$n\in\mathbf{N}$ に対し，N を最小にとれば，$\varepsilon_N=1$ であるから，$m_1(2^{-N}\xi)\widehat{\varphi}(2^{-N}\xi)=\widehat{\psi}(2^{-N+1}\xi)$ を使って，$\widehat{w}_n(\xi)=\prod_{j=1}^{N-1}m_{\varepsilon_j}(2^{-j}\xi)\widehat{\psi}(2^{-N+1}\xi)$（$n\in\mathbf{N}$）とかける．特に $w_1(x)=\psi(x)$, $w_2(x)=2^{1/2}\psi^0(2x)$, $w_3(x)=2^{1/2}\psi^1(2x)$ となる．

非負の整数 $n\in\mathbf{Z}_+$ の 2 進展開のひとつを $n=(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)$ とする．(10.3) で定義される関数 $w_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)}$ に対し，

$$V_0^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N}:=\overline{\mathrm{Span}}\left\{(w_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)})_{-N,k}\right\}_{k\in\mathbf{Z}} \tag{10.4}$$

とおく．関数 $w_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N)}$ は 2 進展開の表示によらないが，スケール $-N$ は 2 進展開の表示によって変わることを注意しておこう．前述の記法でいえば，$V_0^{1,0}=W_{-1}^0$, $V_0^{1,1}=W_{-1}^1$ 等となる．

2 進有理数の集合は $\{n/2^q\}_{n\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{Z}_+}$ とかける．2 進有理数を端点とする区間を **2 進区間**と呼ぶ．区間 $[0,1)$ を交わりをもたない有限個の特別な形をした 2 進区間 $[n/2^q,(n+1)/2^q)$ の和集合に分割することを，この本では区間 $[0,1)$ の **2 進区間分割**と呼び，$[0,1)=\cup_{(n,q)\in Q}[n/2^q,(n+1)/2^q)$ とかく．2 進区間分割を単に Q で表すこともある．$L(Q):=\max_{(n,q)\in Q}q$ を 2 進区間分割 Q の**分割レベル**と呼ぶ．このような 2 進区間分割の仕方は無数にあることを注意しておく．

定理 10.2.1　コンパクト台をもつスケーリング関数 φ に付随して決まる基本ウェーブレットパケットのなす系を $\{w_n\}_{n\in\mathbf{Z}_+}$ とする．このとき，任意の非負の整数 $q\in\mathbf{Z}_+$ に対し，関数系 $\{(w_n)_{-q,k}\}_{n\in\{0,\dots,2^q-1\},k\in\mathbf{Z}}$ は V_0 の正規直交基底である．一般に，区間 $[0,1)$ の任意の 2 進区間分割 $[0,1)=\cup_{(n,q)\in Q}[n/2^q,(n+1)/2^q)$ に対し，関数系 $\{(w_n)_{-q,k}\}_{(n,q)\in Q,k\in\mathbf{Z}}$ は V_0 の正規直交基底である．

証明　$\{\varphi_{0k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は V_0 の正規直交基底だから，$f:=\varphi=\varphi_{00}$ として補題 10.2.1 を適用すれば，$\widehat{w}_{\varepsilon_1}(\xi):=m_{\varepsilon_1}(\xi/2)\widehat{\varphi}(\xi/2)$（$\varepsilon_1\in\{0,1\}$）であるから，$\{(w_{\varepsilon_1})_{-1,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は $V_0^{\varepsilon_1}$ の正規直交基底であって，$V_0=\oplus_{\varepsilon_1\in\{0,1\}}V_0^{\varepsilon_1}$ が成り立つ．次に $f:=w_{\varepsilon_1}$ として補題 10.2.1 を適用すれば，$\varepsilon_1\in\{0,1\}$ に対し，

$$\widehat{F}_{\varepsilon_2}(\xi)=m_{\varepsilon_2}(\xi/2)\widehat{w}_{\varepsilon_1}(\xi/2)=m_{\varepsilon_2}(\xi/2)m_{\varepsilon_1}(\xi/2^2)\widehat{\varphi}(\xi/2^2)=\widehat{w}_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)}(\xi)$$

であり，$j=-2$ とおけば，$\{(w_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)})_{-2,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は $V_0^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ の正規直交基底であって，$V_0^{\varepsilon_1}=\oplus_{\varepsilon_2\in\{0,1\}}V_0^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ が成り立つ．したがって $V_0=\oplus_{(\varepsilon_1,\varepsilon_2)\in\{0,1\}^2}V_0^{\varepsilon_1,\varepsilon_2}$ である．これを繰り返せば，$\{(w_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_q)})_{-q,k}\}_{k\in\mathbf{Z}}$ は $V_0^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_q}$ の正規直交基底であって，$V_0=\oplus_{(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_q)\in\{0,1\}^q}V_0^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_q}$ が成り立つことがわかる．

一般の場合は，$V_0^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_q}$ をさらに細かく 2 つの空間に分解することもできるし，このままひとつの空間にしておくこともできる．(10.4) により，空間 $V_0^{\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_q}$ の正規直交基底をなす基本ウェーブレットパケットは $w_n,\ n=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_q)$ であり，スケールは q であるが，n と q を与えれば一意的に 2 進展開表示が定まることから，1 対 1 対応：$(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_q)\mapsto[n/2^q,(n+1)/2^q)$ によって，基本ウェーブレットパケットとスケールを区間 $[0,1)$ に含まれる 2 進区間をパラメータとして表すことができて，区間 $[0,1)$ の 2 進区間分割がちょうどこのような分解の選択に 1 対 1 に対応することに注意すれば証明は明らかであろう．たとえば，図 10.3 は V_0 が $V_0^{0,0}\oplus V_0^{0,1,0}\oplus V_0^{0,1,1}\oplus V_0^1$ と分解できることを表現している．また，ウェーブレット基底の空間の分解

$$V_0=V_{-1}\oplus W_{-1}=V_{-2}\oplus W_{-2}\oplus W_{-1}=\dots$$

はウェーブレットパケットでは空間の分解

$$V_0=V_0^0\oplus V_0^1=V_0^{0,0}\oplus V_0^{0,1}\oplus V_0^1=\dots$$

に対応し，ウェーブレット基底の空間の分解

$$V_0=V_{-N}\oplus W_{-N}\oplus W_{-N+1}\oplus\cdots\oplus W_{-1}$$

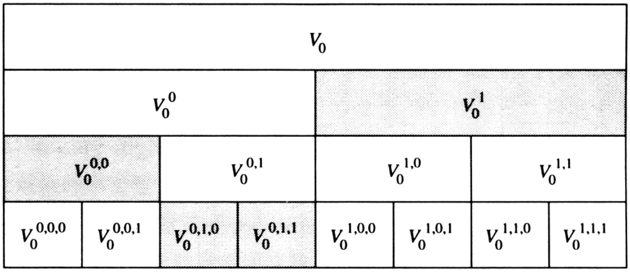


図 10.3 V_0 の分解例

は $V_{-N} = V_0^{\varepsilon_1=0,\ldots,\varepsilon_N=0}$ とし，$W_{-N} = V_0^{\varepsilon_1=0,\ldots,\varepsilon_{N-1}=0,\varepsilon_N=1}$ として，区間 $[0,1)$ の 2 進区間分割 $[0,1/2^N) \cup \left(\cup_{q=1}^{N} [1/2^q, 2/2^q)\right)$ に対応している．□

2 進区間分割 Q に対応する V_0 のウェーブレットパケットのなす正規直交基底 $\{(w_n)_{-q,k}\}_{(n,q)\in Q, k\in\mathbf{Z}}$ を $\mathcal{O}_Q$ とかく．非負の整数 $L \in \mathbf{Z}_+$ に対し，集合 $\mathcal{WP}_L := \{\mathcal{O}_Q\,;\, L(Q) \le L\}$ を V_0 のレベル L の**ウェーブレットパケット基底ライブラリ**と呼ぶ．集合 $\mathcal{WP}_L$ は有限集合であることに注意しよう．集合 $\mathcal{WP} := \cup_{L\in\mathbf{Z}_+} \mathcal{WP}_L$ を単に V_0 の**ウェーブレットパケット基底ライブラリ**と呼ぶ．

共役クワドラチュアフィルタの定義より，m_1 に適当な $e^{-i\xi}$ の偶数べき $e^{-2i\ell\xi}$ ($\ell \in \mathbf{Z}$) をかけても m_0 と $e^{-2i\ell\xi} m_1$ が共役クワドラチュアフィルタであることはかわらない．m_1 を $e^{-2i\ell\xi} m_1$ に取り替えると，ウェーブレット方程式 (8.6) は $\psi(x) = 2\sum_{k\in\mathbf{Z}} g_k \varphi(2x-k-2\ell)$ となり，m_1 に対するウェーブレットを $\psi(x)$ とおくと，$e^{-2i\ell\xi} m_1$ に対するウェーブレットは $\psi(x-\ell)$ であり，ℓ だけ平行移動したことになる．ウェーブレットパケットでは，m_1 を因果的フィルタ選んでおくことが多い．因果的フィルタに対してはウェーブレットパケットも因果的になるからである．ドベシィのコンパクト台をもつスケーリング関数 ($N=3$) に対し，$m_1(\xi) := -e^{-2i(N-1)\xi} e^{-i\xi} \overline{m_0(\xi+\pi)}$ とおいた因果的フィルタを使ったウェーブレットパケットのグラフが図 10.4 である．

10.3 情報理論からの準備

現代の情報理論は確率論と密接に結びついている．ここでは確率論には深入りせずに情報量とそのエントロピーについて説明しよう．確率論と情報理論を初等的に説明した本として [10] がある．

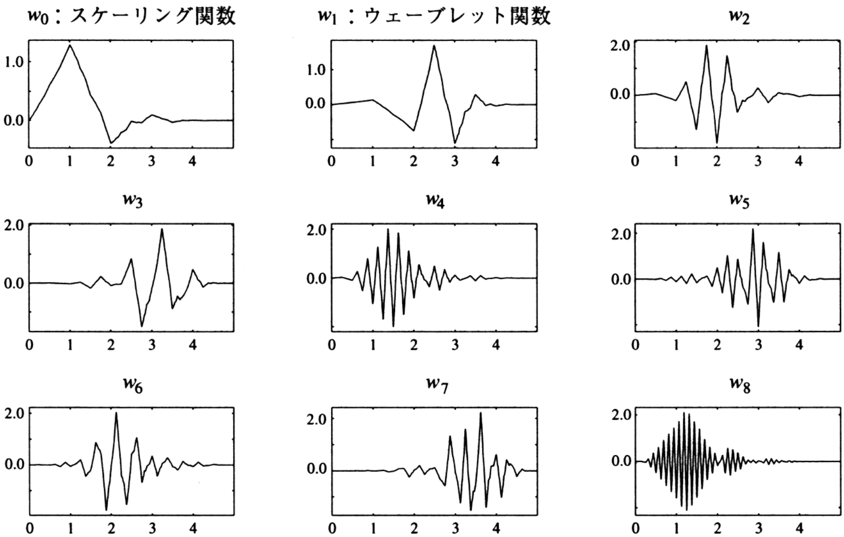


図 10.4　ウェーブレットパケットのグラフ

情報理論で扱う“情報”とは“驚き”のことである．情報の“意味”は問わない．たとえば 2 つのサイコロを振ったとしよう．サイコロの目の和が偶数だと聞いてもさほど驚かない．サイコロの目の和が偶数になる確率は 1/2 だからである．しかし，目の和が 12 だと聞くと驚く．サイコロの目の和が 12 になる確率は 1/36 だからである．このように“驚き”を確率で量ることにより“情報量”を定義することができる．

定義 10.3.1　集合 S は有限集合であるとし，S のべき集合（部分集合全体）を $\mathcal{P}(S)$，P を $\mathcal{P}(S)$ 上の確率測度とする確率空間 $(S, \mathcal{P}(S), P)$ を考える．事象 $E \in \mathcal{P}(S)$ の起こる確率を $P(E)$ とするとき，事象 E の**情報量** $I(E)$ を $I(E) := -\log_2 P(E)$ で定義する．

この定義によれば，事象 E の情報量は $P(E) = 1$ なら $I(E) = 0$，つまり必ず起こることについての“情報”は量としては 0 である．また，事象 E_1 と E_2 が独立のとき，つまり $P(E_1 \cap E_2) = P(E_1)P(E_2)$ であるとき，$I(E_1 \cap E_2) = I(E_1) + I(E_2)$ が成り立つことに注意しよう．

$J := \{1, \ldots, n\}$ とおく．事象の情報量は確率だけに依存するので，値域が $\{x_j\}_{j \in J}$

の離散確率変数 X に対し，事象 $(X = x_j)\,(j \in J)$ とその確率法則 $\{p_j\}_{j \in J}$ だけを扱うことが多い．この場合は $I(p_j) := I(X = x_j)\,(j \in J)$ とかく．

表と裏の出る確率が 1/2 のコインを投げるときの情報量は $I(X = 0) = I(X = 1) = -\log_2(1/2) = 1$ である．これは 1 桁の 2 進数の情報量に対応するので，情報量の単位には "binary digits" を略して *bits* を使っている．

与えられた離散確率変数 X に対し，一般に $x_j\,(j \in J)$ のどの値が起こるかは断言できないから，受け取る情報量 $I(p_j)\,(j \in J)$ がどれだけあるかは知ることができない．したがって情報量自身を離散確率変数と考えることができる．値域は $\{I(p_j)\}_{j \in J}$ であり，離散確率変数を $I(X)$ と表す．

定義 10.3.2 $I(X)$ の期待値を**エントロピー**と呼び，$H(X)$ とかく．つまり

$$H(X) := \sum_{j \in J} -p_j \log_2 p_j$$

である．ただし，$p_j = 0$ のとき $p_j \log_2 p_j = 0$ と定義する．

定義 10.3.2 では対数の底を 2 としたが，場合によっては異なる底が使われることもある．この情報理論におけるエントロピーの定義はシャノン（Shannon）によるもので命名はフォン・ノイマン（von Neumann）による．

補題 10.3.1 X を値域が $\{x_j\}_{j \in J}$ の離散確率変数とする．
(a) $H(X) \geq 0$ である．等号成立は X がひとつの値を確率 1 でとるときに限る．
(b) $H(X) \leq \log_2 n$ である．等号成立は X が一様分布であるときに限る．

証明 (a) $\{p_j\}_{j \in J}$ を事象 $(X = x_j)\,(j \in J)$ の確率法則とする．$H(X) \geq 0$ であることは $0 \leq p_j \leq 1$ とエントロピーの定義より明らかである．$H(X) = 0$ は，任意の $j \in J$ に対し，$p_j \log_2 p_j = 0$ つまり $p_j = 0, 1$ と同値である．したがって等号成立は，ある $i \in J$ があって，任意の $j \in J$ に対し，$p_j = \delta_{ij}$ が成り立つときに限る．

(b) まず，$p_j > 0\,(j \in J)$ とする．$\sum_{j \in J} p_j = 1$ を使って，

$$\begin{aligned} H(X) - \log_2 n &= -\sum_{j \in J} p_j(\log_2 p_j + \log_2 n) \\ &= -(\log_2 2)^{-1} \sum_{j \in J} p_j \log_e p_j n \end{aligned} \tag{10.5}$$

である．$x > 0$ に対し，不等式 $\log_e x \leq x - 1$ が成り立ち，等号成立は $x = 1$ のときに限ることを考えると，

$$H(X) - \log_2 n = (\log_2 2)^{-1} \sum_{j \in J} p_j \log_e (p_j n)^{-1}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq \quad (\log_2 2)^{-1} \sum\nolimits_{j \in J} p_j \{(p_j n)^{-1} - 1\} \\
&= \quad (\log_2 2)^{-1} \left(\sum\nolimits_{j \in J} n^{-1} - \sum\nolimits_{j \in J} p_j \right) \ = \ 0
\end{aligned}
$$

である．等号成立は任意の $j \in J$ に対し，$(p_j n)^{-1} = 1$，つまり $p_j = 1/n$ のときに限る．次にある $k \in J$ があって，$p_k = 0$ が成り立つときを考えよう．(10.5) にもどれば，$-p_k \log_e p_k n = 0 < n^{-1} - p_k$ であるから，この場合も結論が正しいことがわかる．□

補題 10.3.1 により，エントロピーは確率分布の集中度を測るひとつの基準になることがわかる．

K を $\mathbf{Z}$ などの可算または有限の添字集合とする．数列 $p := \{p(k)\}_{k \in K}$ は任意の $k \in K$ に対し，$p(k) \geq 0$ を満たすとき，**非負**であるという．非負な数列 p に対し，$|p| := \sum_{k \in K} p(k)$ とかく．非負な数列 p に対してエントロピーを定義しよう．

定義 10.3.3　非負な数列 p に対し，

$$
H(p) := \sum\nolimits_{k \in K} -(p(k)/|p|) \log_2 (p(k)/|p|)
$$

とおく．ただし，$0 \log_2 0 = 0$ と定義する．$H(p)$ を非負な数列 p の**エントロピー**と呼ぶ．

非負な有限数列 p が $|p| = 1$ を満たすとき，p は離散確率分布であり，シャノンのエントロピーに一致することに注意しよう．

関数 $y = -x \log_2 x$ が $0 < x < 1$ で $y > 0$ であり，$\lim_{\varepsilon \to +0} y(\varepsilon) = y(1) = 0$ であることを考えれば，$H(p)$ は非負の項からなる級数であって，$H(p) < +\infty$ なら級数の和の順序を取りかえても値は変わらないことがわかる．

補題 10.3.2　非負な数列 $p := \{p(k)\}_{k \in K}$ は $H(p) < +\infty$ を満たすとする．添字集合 K を $K = K_1 \cup K_2$, $K_1 \cap K_2 = \emptyset$ と 2 つの添字集合に分割する．添字集合の分割に対応して，p が 2 つの部分列 $q := \{p(k)\}_{k \in K_1}$ と $r := \{p(k)\}_{k \in K_2}$ に分割される．$\alpha := |q|/|p|$ とおき，2 つの項からなる数列 $\{\alpha, 1 - \alpha\}$ を s とおくと，

$$
H(p) = \alpha H(q) + (1 - \alpha) H(r) + H(s) \tag{10.6}
$$

が成り立つ．

証明 $|p|=|q|+|r|$ であるから，α は $0 \le \alpha \le 1$ を満たし，$|r|/|p| = 1-\alpha$ となる．$|q| = \sum_{k\in K_1} p(k)$ を使って変形すると，

$$\begin{aligned}
&\sum\nolimits_{k\in K_1} -(p(k)/|p|)\log_2(p(k)/|p|) \\
=\ & (|q|/|p|)\sum\nolimits_{k\in K_1} -(p(k)/|q|)\{\log_2(p(k)/|q|)+\log_2(|q|/|p|)\} \\
=\ & \alpha\sum\nolimits_{k\in K_1} -(p(k)/|q|)\log_2(p(k)/|q|) - \alpha\log_2\alpha\sum\nolimits_{k\in K_1} p(k)/|q| \\
=\ & \alpha H(q) - \alpha\log_2\alpha
\end{aligned}$$

が成り立つから，非負な級数 $H(p)$ の $\sum_{k\in K}$ は $\sum_{k\in K_1}$ と $\sum_{k\in K_2}$ に分けて加えても変わらないことに注意すれば (10.6) を得る．□

ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ を考える．$\mathcal{H}$ の閉部分空間を $\mathcal{N}$ とし，$\mathcal{N}$ 上への射影作用素を $P_{\mathcal{N}}$ とする．量子力学における確率論的解釈のように，$f\in\mathcal{H}$ に対し，$||P_{\mathcal{N}}f||^2/||f||^2$ を f が $\mathcal{N}$ に存在する確率であると考えれば，ヒルベルト空間の元に対し，エントロピーが定義できる．

定義 10.3.4 $\mathcal{H}$ をヒルベルト空間とする．$f\in\mathcal{H}$ と $\mathcal{H}$ の正規直交基底 $\{e_k\}_{k\in K}$ に対し，

$$H(f,\{e_k\}_{k\in K}) := -\sum\nolimits_{k\in K} (|(f,e_k)|^2/||f||^2)\log_2(|(f,e_k)|^2/||f||^2)$$

とおく．$H(f,\{e_k\}_{k\in K})$ を f の正規直交基底 $\{e_k\}_{k\in K}$ に関する**エントロピー**と呼ぶ．ただし，$0\log_2 0 = 0$ と定義する．

系 10.3.1 ヒルベルト空間 $\mathcal{H}$ の閉部分空間 $\mathcal{N}$ の直交補空間を $\mathcal{N}^\perp$ とかき，$\mathcal{N}$ 上への射影作用素を $P_{\mathcal{N}}$，$\mathcal{N}^\perp$ 上への射影作用素を $P_{\mathcal{N}^\perp}$ とする．$\mathcal{N}$ のひとつの正規直交基底を $\{e_k\}_{k\in K_1}$ とし，$\mathcal{N}^\perp$ のひとつの正規直交基底を $\{e_k\}_{k\in K_2}$ とする．添字集合 K_1 と K_2 を $K_1\cap K_2=\emptyset$ を満たすようにうまく選び，$K:=K_1\cup K_2$ とおくと $\{e_k\}_{k\in K}$ は $\mathcal{H}$ の正規直交基底となるとしてよい．このとき，$f\in\mathcal{H}$ に対し，$f_1 := P_{\mathcal{N}}f$, $f_2 := P_{\mathcal{N}^\perp}f$, $\alpha := ||f_1||^2/||f||^2$, $s=\{\alpha, 1-\alpha\}$ とおくと，

$$H(f,\{e_k\}_{k\in K}) = \alpha H(f_1,\{e_k\}_{k\in K_1}) + (1-\alpha)H(f_2,\{e_k\}_{k\in K_2}) + H(s) \quad (10.7)$$

が成り立つ．

証明 ヒルベルト空間の元に対するエントロピーの定義より，補題 10.3.2 の非負な数列 $p:=\{p(k)\}_{k\in K}$ は $\{|(f,e_k)|^2\}_{k\in K}$ に対応し，$|p|$ は $||f||^2$ に対応することを考えれば明らかであろう．□

10.4　最適基底アルゴリズム

既に 8.4 節で述べたように，実用上は解析しようとする信号が (8.9) であると仮定してもよく，ウェーブレットパケット基底ライブラリにより無数の V_0 の正規直交基底が得られたので，残された問題は

- どのような基準で解析したい関数（信号）に応じて基底を選んだらよいのだろうか．

という問題である．この選択基準に関してはいくつかの方法が提案されているが，この本では 10.3 節で述べたエントロピーに基づき次のように定めよう．

定義 10.4.1　非負の整数 $L \in \mathbf{Z}_+$ と信号 $f \in V_0$ に対し，

$$H(f, \mathcal{O}_{Q_0}) = \min_{\mathcal{O}_Q \in \mathcal{WP}_L} H(f, \mathcal{O}_Q) \tag{10.8}$$

を満たすウェーブレットパケット基底 $\mathcal{O}_{Q_0} \in \mathcal{WP}_L$ が存在するとき，$\mathcal{O}_{Q_0}$ を信号 $f \in V_0$ に対する**レベル L の最適基底**と呼ぶ．

レベル L のウェーブレットパケット基底ライブラリ $\mathcal{WP}_L$ は有限集合であるから，信号 $f \in V_0$ に対し，エントロピー $H(f, \mathcal{O}_Q)$ が有限となるウェーブレットパケット基底 $\mathcal{O}_Q$ が少なくともひとつ存在するなら，(10.8) を満たす $\mathcal{O}_{Q_0}$ が少なくともひとつ存在することは明らかである．

応用上，解析したい信号 $f \in V_0$ は台がコンパクトであるとか，周期的であるとか，閉区間に制限するなどの方法により，有限な長さをもっていると考えてよいであろう．ここでは，信号 $f \in V_0$ の台はコンパクトであると仮定しよう．この場合は基本ウェーブレットパケットがコンパクト台をもつことより，有限離散確率分布のエントロピーを考えることに帰着できる．したがって，エントロピーが常に有限となり，信号 $f \in V_0$ に対するレベル L の最適基底が存在し，補題 10.3.1 が使えることになる．

最適基底はエントロピーを最小にする基底を選ぶので，信号の最適基底に関する展開係数の絶対値の 2 乗の分布は最も集中する，つまりある特定の展開係数の絶対値が大きく，多くの展開係数の絶対値は 0 に近くなると思える．絶対値が 0 に近い展開係数を 0 とおくことにより，基底の少数の関数だけで信号のよい近似を得ることができる．このことにより，データの重要な情報を失うことなく，データ量を大きく減らすことができる．もちろん，必要なら 0 とおいた係数をもとに戻すことにより，オリ

ジナルの信号を再現することができる．この最適基底によるデータ圧縮の考え方は既に FBI（米国連邦検察局）の指紋照合システム等の多くの分野で使われている．

コンパクト台をもつ信号 $f \in V_0$ に対するレベル L の最適基底を選ぶアルゴリズムについて考えてみよう．

(1) 任意の $\ell \in \mathbf{Z}_+$ $(\ell \leq L)$ に対し，V_0 を $V_0 = \oplus_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell)\in\{0,1\}^\ell} V_0^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell}$ と分割する．

(2) 任意の $\ell \in \mathbf{Z}_+$ $(\ell \leq L)$ に対し，エントロピー

$$H_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell} := H\Big(P_{V_0^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell}} f, \big\{(w_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell)})_{-\ell,k}\big\}_{k\in\mathbf{Z}}\Big)$$

を計算する．

(3) $\ell = L$ のとき，$V_0^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_L}$ の最適基底は

$$\mathcal{O}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_L} := \big\{(w_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_L)})_{-L,k}\big\}_{k\in\mathbf{Z}}$$

であると定める．このとき，信号 $P_{V_0^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_L}} f \in V_0^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_L}$ の最適基底 $\mathcal{O}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_L}$ に関するエントロピーは $H_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_L}$ である．

(4) $0 \leq \ell \leq L-1$ のとき，$V_0^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell}$ の基底として $\cup_{\varepsilon_{\ell+1}\in\{0,1\}} \mathcal{O}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell,\varepsilon_{\ell+1}}$ を選んだ場合の信号 $P_{V_0^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell}} f \in V_0^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell}$ のエントロピー $\widetilde{H}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell}$ を (10.7) を使って計算する．$\widetilde{H}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell} > H_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell}$ ならば $V_0^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell}$ の最適基底は

$$\mathcal{O}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell} := \big\{(w_{(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell)})_{-\ell,k}\big\}_{k\in\mathbf{Z}}$$

であると定め，$\widetilde{H}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell} \leq H_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell}$ ならば $V_0^{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell}$ の最適基底は

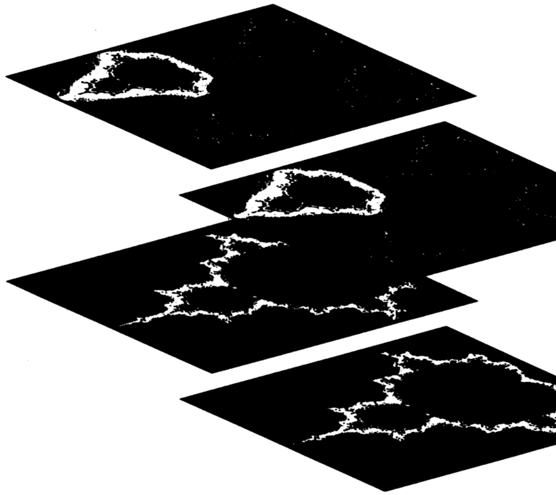
$$\mathcal{O}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell} := \cup_{\varepsilon_{\ell+1}\in\{0,1\}} \mathcal{O}_{\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_\ell,\varepsilon_{\ell+1}}$$

であると定める．

(5) この操作を $\ell = 0$ となるまで繰り返すことにより求まる V_0 の最適基底 $\mathcal{O}$ がコンパクト台をもつ信号 $f \in V_0$ に対するレベル L の最適基底である．

上に述べたアルゴリズムを**最適基底アルゴリズム**と呼ぶ．

Part III
工学的応用編



第 11 章

工学的応用編を読むにあたって

思えば 3 年前の 1993 年，山本がウェーブレットの研究を始めて間もない頃に D. E. Newland の不規則振動の名著 [*An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*, 3rd ed., Addison Wesley Longman, 1993] の 17 章に Discrete Wavelet Analysis が登場した．以前から D. E. Newland の達意の文章とその噛んで含める講述に心酔していた山本は工学者が書いた初めてのウェーブレットの本ということで，大きな期待をもってこれを読了した．その当時，ウェーブレットの初学者であった山本は，苦労して勉強したウェーブレットの使い道を熱心にさがしていた．不規則振動論の世界的名著の著者は，その本の中で期待通り，いくつかのウェーブレットの使い方について示唆を示してくれて，暗路に光明を見た思いがした．

本編では，ここで得られた示唆を多数の例題と卑近な比喩をもって成熟させ，さらに具象化することを試みた．この過程は自問自答の繰返しであって，昂揚と落込みの繰返しでもあった．その成果を眺めて見ると，当初の期待をはるかに超えたものが得られた気持がする．これは，ウェーブレットが持つ神秘的な魅力が原動力となって果せたものと思っている．

具体的には，ウェーブレットの持つ特性を不連続信号の検出，相似相関の検出，データ操作の 3 つの機能に分類して，その各々について例題を交えて，短時間フーリエ解析と対比しつつ解析して，ウェーブレットの特徴を十分に引き出すことができた．特に相似相関の検出の項ではウェーブレットが信号中に含まれる相似な信号をあるがままに検出する能力があることを示し，これをウェーブレットの「動態解析」と称した．このウェーブレットの動態解析という用語は本書で始めて用いたもので，この用語の

是非をめぐっての議論が，ウェーブレットの更なる潜在的可能性を引き出す端緒となれば望外の幸いである．

11.1　工学的応用編の内容

本編では，ウェーブレット解析の工学への応用について，多数の解析例を用いて述べることにしたい．

ウェーブレット変換は短時間フーリエ変換（窓フーリエ変換）の不備な点を補う目的で開発されたと言われている．したがって，ウェーブレット変換が工学のどのような分野のどのような場所で有効に使われていくかを考える際に，短時間フーリエ変換と対比して，その優劣を考えて行くのが最も自然と思われる．そこで，この応用編では，いろいろな例題に対して，短時間フーリエ変換とウェーブレット変換を同時に実行して，その得失を比較検討した．この比較は，若干くどいと感じられるくらい繰返し行っているが，これらを 2 つの異なった手法を用い整理した実験結果と考えれば，これを注意深く観察することで，種々の新しい事実が明らかとなり，工学への応用の着想へのヒントが得られるものと思われる．短時間フーリエ解析やウェーブレット解析を工学に応用する利点は，次の 3 点に集約される．

1. 不連続信号の検出 …… 信号に含まれる波形の不連続の位置とおおまかな大きさを検出する．

2. 相似相関の検出 …… 短時間フーリエ解析やウェーブレット解析に用いた関数系と相似なものを信号の中から選び出して検出する．

3. データ操作 …… ウェーブレットでは再構成が保証されているので，波形をウェーブレット展開して，その係数のうち，取り除きたい成分を削除して，再構成すると，原波形から不要な成分を取り除いた波形が得られる．すなわち，データを任意に操作することができる．これは，別の言葉で言えばデータに適切なフィルタをかけるということである．

この応用編では，上に述べた 3 つの応用の利点について，順を追ってその原理をまず述べて，その後に解析例題をあげて，この効果を実証する．

11.2 ウェーブレットの紹介

さて，幕開けの前に，主演のウェーブレット諸嬢を紹介しよう．まず，図 11.1 にドベシィ，メイエ，メキシカンハットの各ウェーブレットを一覧した．左からドベシィ，メイエ，メキシカンハットの順に示してあり，スケールファクタ $j=4$ を最下段に示して，上の方に $j=3,2,1$ と示してある．いずれの場合も j の値が小さくなるとウェーブレットは横軸（時間軸）に対して縮小している．

ここでの j は，本編ではドベシィ流の表現を採用する．すなわち，多重解像度解析の包含関係は $V_j \subset V_{j-1}$ とし，離散ウェーブレットは $\psi_{j,k}(x)=2^{-\frac{j}{2}}\,\psi(2^{-j}x-k)$ とおいている．これにより，$j \to -\infty$ では近似が向上するようにしてある．この関係はメイエ流の表現とは全く逆であることに注意してほしい．

ドベシィのウェーブレットで $N=8$ とあるのは，ウェーブレットを生成するときの指数を示しており，$N=3$ のように生成指数の少ないものは，かなりごつごつした形を示すが，$N=8$ のように生成指数の大きいものは，この図に示したように滑らかなウェーブレットとなる．また，ドベシィのウェーブレットをよく見ると左右対称でないことがわかる．一方，メイエとメキシカンハットのウェーブレットは，左右対称である．メキシカンハットは，メキシコの帽子に似た形をしているのでこのように呼称される．これらのウェーブレットの，その妙なる形に注目していただきたい．このように妙なる形の，しかも直交基底を形成するウェーブレットが生み出されたのは驚嘆すべきことでドベシィやメイエの功績をたたえるべきである．これらのウェーブレットをフーリエ変換したのが図 11.2 であり，これによって各ウェーブレットの保有する周波数成分がわかる．このフーリエ変換図は，各ウェーブレットの周波数領域での窓を与えているものと考えることができる．すなわち，スケールファクタ $j=4$ から $j=1$ に至るにつれて，中心周波数が高次に移行して高周波域に窓が開いているのが見られる．図 11.1 の各ウェーブレットが妙なる形をしているのに反し，この図はいたって間が抜けた図に見える．しかし，よく見るとドベシィのウェーブレットでは，その成分は小さいが高次の成分が含まれているのがわかる．例えば，$j=1$ で見ると 3 [Hz] 弱の所で小さい山が見られる．一方，メイエでは，山の項が平坦（周波数域でコンパクトサポート）であるのが特徴である．

次にガボール関数の一覧を図 11.3 に示す．ガボール関数については，12.2 不連続点の検出 の項で詳しく述べるが，ここでは，簡単に定義のみを述べておくことにする．すなわち，ガウス関数と複素指数関数の積を創始者の名前（ガボール）をとってガボール関数とした．ガウス関数の中で窓の幅を指す指標 α を適当に何組か選んで，

時間の経過に応じた周波数解析を行うことをガウス関数を用いた短時間フーリエ変換という．さて，図を見ると横に窓幅の指数 $\alpha = 0.5, 0.1, 0.05$ をとり，縦にガボール関数の振動数 $f = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0$ [Hz] ととり，それぞれに相当するガボール関数を示してある．ここで， α が小さくなると窓幅は小さくなり時間軸上で圧縮されデルタ関数に近づいていくし，図中の波形はガウス関数を包絡曲線とする正弦波であり，その振動数を $f = 1.0, 2.0, 3.0, 4.0$ [Hz] と選んである．また，各図の下の m の値は，0 次のモーメントコンディションであり，12.2 不連続点の検出 の項で詳しく述べるが，平たくいえば，各ウェーブレットの面積のことで，ウェーブレットではこの面積が 0 になるように形成されている．

一方，ガボール関数では，窓の幅とその振動数を任意に選択するために，その波形の面積は 0 でなくなることもある．その様子は，振動数 f が $f = 1.0$ [Hz] のように低く，窓幅 α が $\alpha = 0.05$ のように小さくなると図中に示したように $m = 0.1389$ と有限値をとっていることがわかる．ウェーブレットで行ったときと同じように，ガボール関数のフーリエ変換をとったものを図 11.4 に示した．



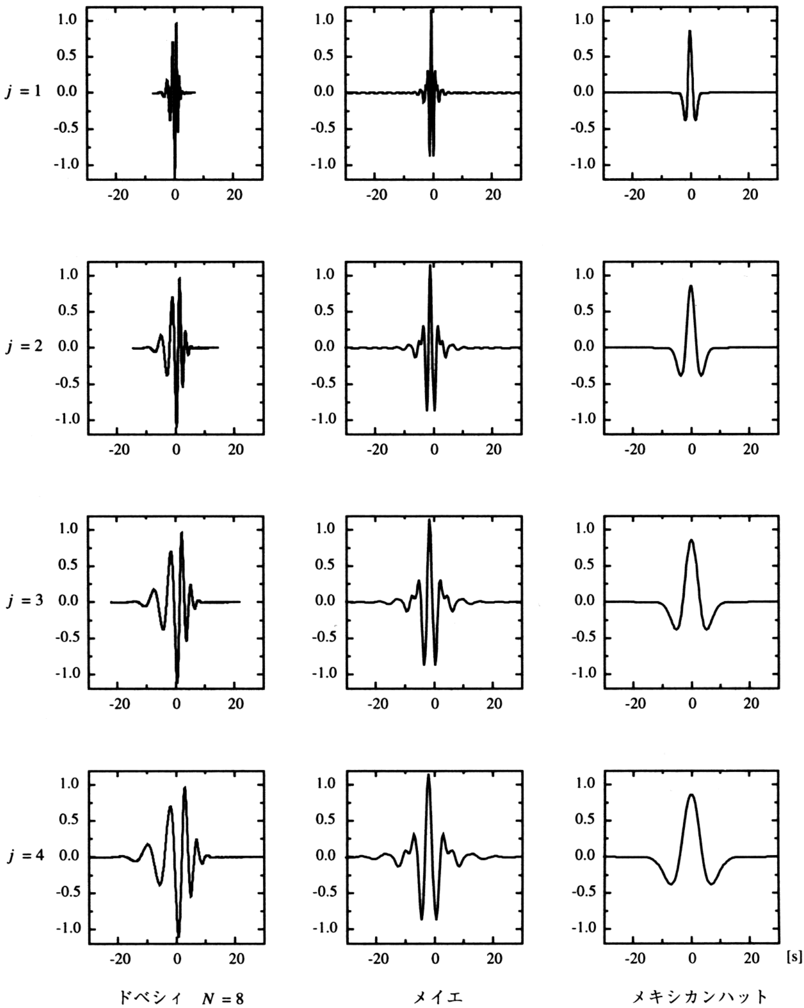


図 11.1 ドベシィ，メイエ，メキシカンハットのウェーブレット一覧

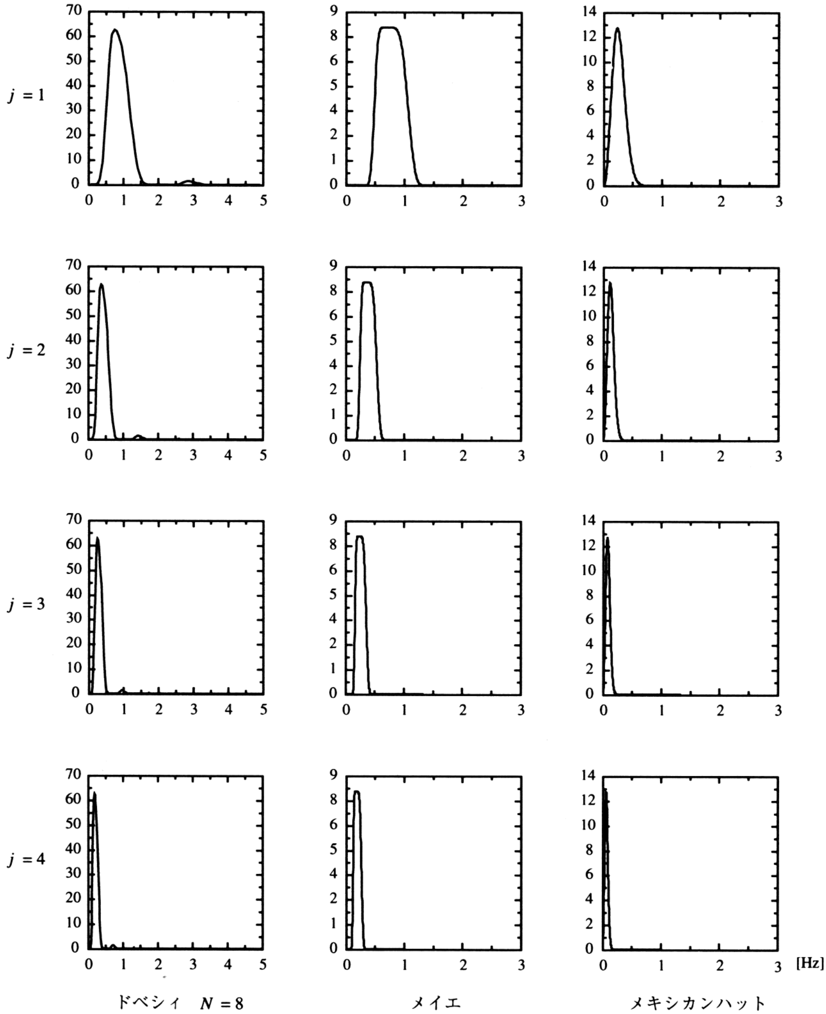


図 11.2 ドベシィ，メイエ，メキシカンハットのウェーブレットのフーリエ変換一覧

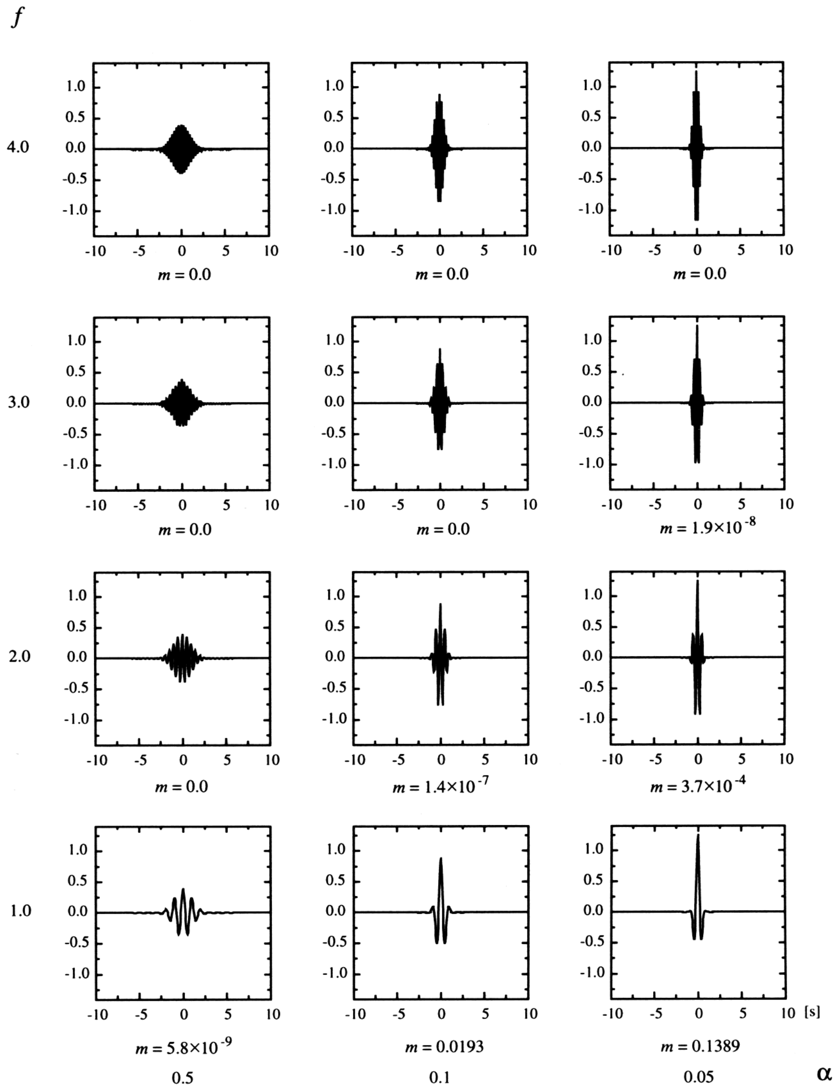


図 **11.3**　ガボール関数一覧

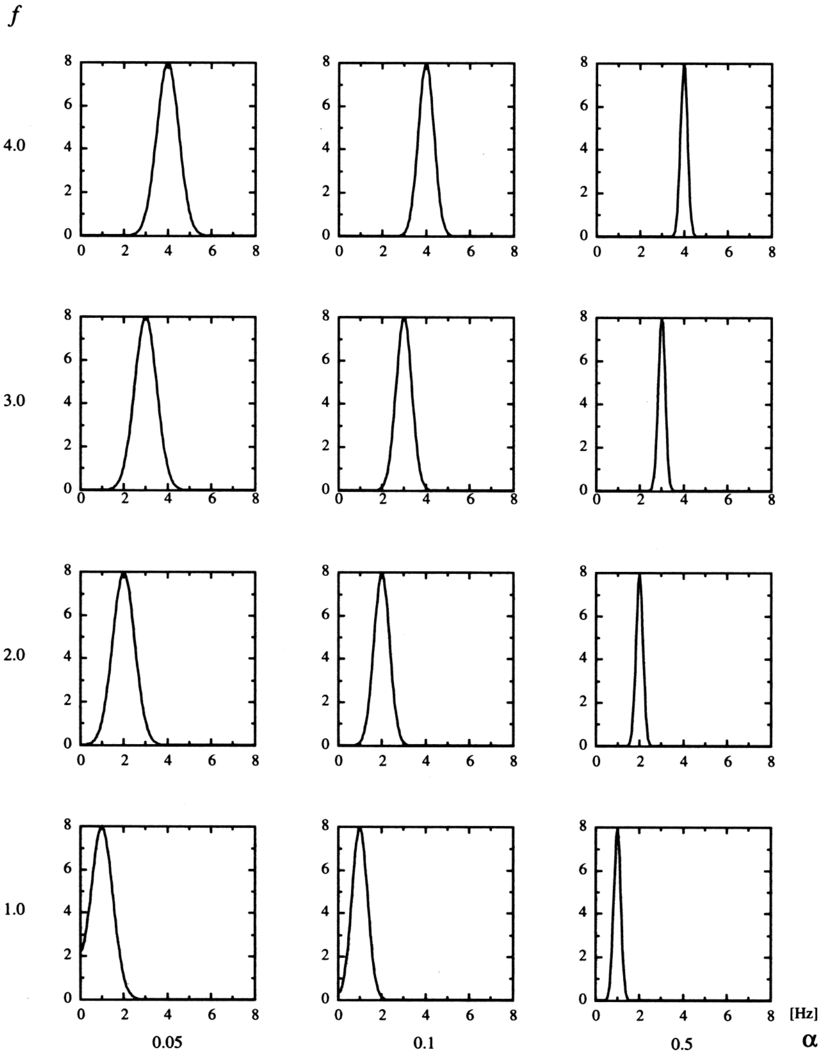


図 11.4　ガボール関数のフーリエ変換一覧

第 12 章

ウェーブレット展開による不連続信号の検出

12.1　不連続信号検出の原理

ウェーブレット解析の工学への応用の有効性を考えたとき，その第一の機能は不連続信号の検出である．自然の現象は，多かれ少なかれ動的に変動しており，一般にはその動的な変動は安定しており定常な状態を示す．しかし，長い間の動的な変動に伴って，何らかの変調をきたすのは自然の摂理で，この変調に伴って，信号は不連続となる．もし，この信号の不連続を検知することができれば，変調に対処することができて有効である．一般には，これらの不連続信号は，極めて小さく，しかも雑音に覆われている．ウェーブレット変換は，この信号の不連続を検知する能力があり，ここでは，その信号の不連続の検出の原理を述べる．

ドベシィは多重解像度解析に基づいてウェーブレットを生成している．まず，スケール関数（ファザーウェーブレット）$\varphi(t)$ は，多重解像度解析における閉部分空間 V_0 の正規直交基底で，閉部分空間 V_0 において $\{\varphi_{0n} \equiv \varphi(t-n)\ ;\ n \in \mathbf{Z}\}$ が正規直交基底をなすものであり，次のように展開される．

$$\varphi(t) = \sqrt{2}\sum_n h_n \varphi(2t-n) \tag{12.1}$$

さらに，アナライジングウェーブレット $\psi(t)$ は，同様にスケール関数 $\varphi_{-1,n}$ で展開

される．

$$\psi(t) = \sqrt{2}\sum_n (-1)^n h_{1-n}\varphi(2t-n) \tag{12.2}$$

ドベシィは，任意の整数 $N \geq 2$ に対して，$\varphi(t)$ のサポートと，$\psi(t)$ の $N-1$ 次のモーメントおよび関数の連続性に関して次の条件を満たすように $\{h_n\}$ を求めた．

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{supp}\varphi = [0, 2N-1] \\ &\int_{-\infty}^{\infty} t^m \psi(t)\,dt = 0 \qquad (0 \leq m \leq N-1) \\ &\varphi(t), \psi(t) \in C^{\lambda(N)} \end{aligned}\right\} \tag{12.3}$$

ここで，$C^{\lambda(N)}$ は，$[\lambda(N)]$ 階の導関数がヘルダー連続性を持つ関数の空間を表す．ただし，大きな N に対して，$\lambda(N) \simeq 0.2075N$ となる．また，アナライジングウェーブレット $\psi(t)$ のサポートは，$\operatorname{supp}\psi = [1-N, N]$ である．以下では，N をウェーブレット生成指数と称する．さらに，展開係数 h_n に関しては，次のような関係が存在する．

$$\left.\begin{aligned} &h_n = 0 \qquad (n < 0 \ \text{or}\ n > 2N) \\ &\sum_n h_n = \sqrt{2} \\ &\sum_n (-1)^n h_{1-n} n^m = 0 \qquad (0 \leq m \leq N-1) \end{aligned}\right\} \tag{12.4}$$

さて，(12.3) の第2式，すなわち，$0 \sim N-1$ 次までのモーメントが 0 であれば，$p(t)$ を t に関して $N-1$ 次以下の多項式とすると，次式が成立する．

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(t)\psi_{j,k}(t)\,dt = 0 \tag{12.5}$$

$x(t) \in D^s$ で $d^{(s+1)}x/dt^{(s+1)}$ は存在するが必ずしも連続でない場合，これを時刻 t_0 に関してテイラー展開すると，

$$\begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \cdots + x^{(s)}(t_0)\frac{(t-t_0)^s}{s!} \\ &\quad + \int_0^1 \frac{(1-\sigma)^s}{s!}(t-t_0)^{s+1} x^{(s+1)}\big(t_0 + \sigma(t-t_0)\big)\,d\sigma \end{aligned} \tag{12.6}$$

上式の $x(t)$ のウェーブレット変換，すなわち， $x(t)$ と $\psi_{j,k}(t)$ の内積をとり，(12.3) を考慮すると次式を得る．

$$\langle x(t), \psi_{j,k}(t)\rangle = \left\langle \int_0^1 \frac{(1-\sigma)^s}{s!}(t-t_0)^{s+1}x^{(s+1)}\Big(t_0+\sigma(t-t_0)\Big)\,d\sigma,\ \psi_{j,k}(t)\right\rangle \quad (12.7)$$

ここで，$d^{(s+1)}x/dt^{(s+1)}$ の特異点（不連続信号）の情報を $\langle x(t), \psi_{j,k}(t)\rangle$ の j, k を動かすことにより取り出せる可能性がある．つまり，$d^{(s+1)}x/dt^{(s+1)}$ が $t = t_0$ で不連続だとすると，$t_0 \in \operatorname{supp}\psi_{j,k}(t)$ である (j,k) と $t_0 \notin \operatorname{supp}\psi_{j,k'}(t)$ である (j,k') について，j を十分小さくとり，$\psi_{j,k}(t)$ と $\psi_{j,k'}(t)$ のサポートを小さく絞れば，$\alpha_{j,k} = \langle x(t), \psi_{j,k}(t)\rangle$，$\alpha_{j,k'} = \langle x(t), \psi_{j,k'}(t)\rangle$ とおくとき，$|\alpha_{j,k}| > |\alpha_{j,k'}|$ となり，$t = t_0$ での不連続点でのウェーブレット係数の絶対値が，その他の点より一段と大きくなり，その不連続点を検出できる．



12.2 ウェーブレット解析とガウス関数を用いた短時間フーリエ解析

著者は平成 8 年度の機械学会の講習会等でウェーブレット解析による不連続波形の検出に関する講演を何度かする機会を得た．講演の後に受講者からの質問は，次の 2 点に集約される．

1. ウェーブレット解析は短時間フーリエ解析と比べて，どこに利点があるのか？

2. ウェーブレット解析はなぜ，不連続波形の検出に有効なのか？

第 1 の質問について，“短時間フーリエでは窓の幅が一定であるが，ウェーブレットでは窓の幅と周波数を同時に変化させることができる”と答えたとする．質問者は，一応は納得するが，その顔は満足していない．“短時間フーリエ変換で何種類かの窓幅について周波数解析したらウェーブレット変換と同じ結果が得られるのではないか??…”という疑問が，その人の頭の中を横切っているのが読みとれる．また，第 2 の質問に 12.1 の不連続信号検出の原理で述べたように，“ウェーブレットがモーメントコンディションを満足しているので，不連続信号の位置でのウェーブレット展開係数が際だって大きくなる．これによって不連続信号が検出できる”と答えたとする．ここでも質問者の顔は，強制的に納得させられたが，同じように満足してない．質問者の顔に，“ある種の短時間フーリエ変換では，モーメントコンディションが成立していなくても，不連続信号の検出が可能だぞ??…”という疑問が脳裏を横切っているのが見てとれる．素直な質問は最善の教師である．ウェーブレット解析の神秘性にせまり，新しい技術を覆う特有のベールをはがすには，上述した質問に素直に答えるとともに，質問者の脳裏を横切る疑問に答えることが必要である．すなわち，原理原則とともに現象を目で見て，実感することが有効と思われる．

そこで，この応用編では，ウェーブレット解析は短時間フーリエ解析の延長上にある新しい技術であるという観点より，その両者の得失を目で見てわかるように多くの計算例の図表によって議論してみたいと思う．実のところ，質問者の脳裏をかすめた疑問は，著者の一人の脳裏を占めていた疑問なのかもしれない．ここで，これらの疑問を解く鍵が得られれば望外の収穫である．

新しい技術ウェーブレットと対比するガウス関数を用いた短時間フーリエ変換を用いることとする．ガウス関数は，

$$g_\alpha := \frac{1}{2\sqrt{\pi\alpha}}e^{-\frac{t^2}{4\alpha}} \tag{12.8}$$

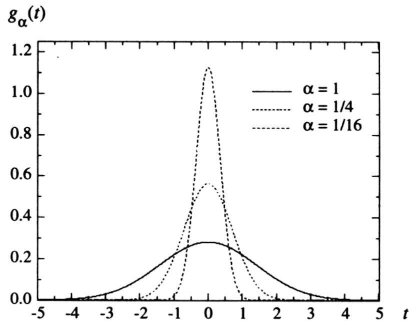


図 **12.1**　ガウス関数

であり，これを窓関数に用いた短時間フーリエ変換は，創始者の名前をとってガボール変換 $(G_b^\alpha f)(\omega)$ と呼ばれ，次式で示される．

$$(G_b^\alpha f)(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\omega t}\, f(t)\, g_\alpha(t-b)\, dt \tag{12.9}$$

窓関数として用いたガウス関数を図 12.1 に示す．g_α は $\alpha \to 0_+$ の極限ではデルタ関数 δ になることが知られている．次のような定義

$$G_{b,\omega}^\alpha(t) := e^{i\omega t}\, g_\alpha(t-b) \tag{12.10}$$

を用いると (12.9) は，

$$(G_b^\alpha f)(\omega) = \left(f,\, G_{b,\omega}^\alpha\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, \overline{G_{b,\omega}^\alpha(t)}\, dt \tag{12.11}$$

のようにかけることに注意しよう．ここで $G_{b,\omega}^\alpha(x)$ をガボール関数，また $(G_b^\alpha f)(\omega)$ をガウス関数を用いた短時間フーリエ変換と呼ぶ．

一方，第 5 章の定義 5.4 に ψ がアナライジングウェーブレットのとき関数 $f(t) \in L^2(\mathbf{R})$ と $a, b \in \mathbf{R}$（$a > 0$）に対して次の積分

$$(W_\psi f)(b,a) := \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{\mathbf{R}} f(x) \overline{\psi\left(\frac{x-b}{a}\right)}\, dx \tag{12.12}$$

をウェーブレット係数と呼び，$f(x)$ から $(W_\psi f)(b,a)$ への対応をウェーブレット変換と定義した．また，このウェーブレット変換は，$\psi_a(x) := a^{-\frac{1}{2}}\psi(x/a)$ とおくと，

$$(W_\psi f)(b,a) = \left(f, \psi_a(x-b)\right) \tag{12.13}$$

とかけることも述べた．ここで，離散化にあたり 2 進分割（binary partition）をとることとして，$a = 2^j$，$b = 2^j k$ とするとウェーブレットは次のように離散化される．

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{-\frac{j}{2}}\,\psi(2^{-j}t - k) \tag{12.14}$$

この式はドベシィ流の表現であり，j の小さい値のものは高周波になる．一方，メイエ流では j の前にマイナスがないのでドベシィとは逆に j の大きな値が高周波となる．

もし，ψを適当に選ぶと $\{\psi_{j,k}\}$ を $L^2(\mathbf{R})$ の完全正規直交系にすることができる．このとき信号 $x(t)$ は次のようにウェーブレット展開され，

$$x(t) = \sum_j \sum_k \alpha_{j,k}\psi_{j,k}(t) \tag{12.15}$$

その展開係数 $\alpha_{j,k}$ は次のように与えられる．

$$\alpha_{j,k} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\overline{\psi_{j,k}(t)}\,dt = \bigl(x(t),\,\psi_{j,k}(t)\bigr) \tag{12.16}$$

図 11.1 にドベシィのウェーブレット ($N = 8$)，メイエおよびメキシカンハットを示し，そのフーリエ変換を図 11.2 に示した．図 11.1 の下から $j = 4$ から $j = 1$ に至るにつれて波の周波数が高くなり，これに伴って図 11.2 のフーリエ変換値のピーク値が高周波数に移行している．それと共に波の幅も狭くなり，よって窓の幅が狭くなっていることが見られる．このようにスケール j を変化させるのみで周波数と窓の幅を同時に変化させることができるのがウェーブレットの特徴であり，言い換えると j の変化によってウェーブレットは相似的に拡大または縮小される．

一方，ガボール関数 $G^{\alpha}_{b,\omega}(x)$ は，窓の幅 $\sqrt{\alpha}$ と周波数 ω は別々に与えられるので横軸に α，縦軸に周波数 f をとり，その形を図 11.3 のように表すことができる．窓の幅と周波数を自由に取れるので，その波の形は相似形にならず 0 次のモーメントコンディション $M = \int_{-\infty}^{+\infty} G^{\alpha}_{b,\omega}\,dt = 0$ も成立していないので，12.1に述べたウェーブレットの不連続波形の検出の条件がモーメントコンディションにあると述べたことは，ここには当てはまらない．

ガウス関数を用いた短時間フーリエ解析とウェーブレット解析の不連続信号の検出能力を比較検討する目的で図 12.2 に示した 3 種類の不連続波形を用いた．すなわち，周期 T が $T = 1, 10, 128$ 秒であり，それぞれ中央に不連続を有するたがいちがいの波である．

まず，3 種類の不連続波形 $f(t)$ のガウス関数を用いた短時間フーリエ変換の方から眺めてみよう．不連続波形 $f(t)$ の 3 種類の周期 $T = 1.0, 10, 128$ 秒のガウス関数を

用いた短時間フーリエ変換の結果を図 12.3，図 12.5，図 12.7 に示す．周期 $T = 1.0$ 秒の場合では，$\alpha = 0.0001$ と非常に窓幅を小さくしないと不連続点は検出できない．一方，その周期が $T = 10$ 秒になると $\alpha = 0.001$ で検出できて，$T = 128$ 秒では $\alpha = 0.05$ でも検出ができる．これは，周期 T が長くなると T が短いときと比べて，不連続性が際だってくるので，その検出が容易となると解釈できる．

ところで，図 12.7 の $\alpha = 0.05$ で $f = 1.0$ [Hz] の図を見ると，不連続振幅の 1/3 のところより左右に分岐して三角形の台を形成している．この傾向は $\alpha = 0.1$ で $f = 1.0$ [Hz] の図でも，わずかながら，その兆候が認められる．振動数が $f = 1.0$ [Hz] と低く，しかも α が 0.1 から 0.05 と小さくなり，結果として窓の幅が狭くなると，0 次のモーメントが 0 でなくなり，ガボール関数はデルタ関数に近づいていく．一方，デルタ関数と他の関数との内積は，その関数を再生する能力があるので，ここでは，α の小さいガボール関数が図 12.2 の関数の傾斜部分を，そのまま再成している．しかし，この再成されたものが図 12.2 のように左右逆対称でないのは，ガボール関数が複素数値であり，変換値も複素数となり，その絶対値を縦軸にとっているので，左右対称の三角形の台を呈するのである．

一方，同じ不連続波形 $f(t)$ の周期 $T = 1.0, 10, 128$ 秒の場合のウェーブレット展開を図 12.4，図 12.6，図 12.8 に示す．これらの図からわかるように 3 種の不連続波形に対してのガウス関数を用いた短時間フーリエ変換は，それぞれの波形に対して，それぞれ特徴を持っていたが，ウェーブレット展開は，全く差異が認められない．このように，ウェーブレット展開は，ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換に比べて，鈍感な，換言すればタフな検出能力を有するといえる．

離散ウェーブレット展開は，ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換における窓の幅と周波数の変化をひとつの変数スケールファクタ j の変化によって相似的に変えるものである．また，j の変化に応じて 2 進変化をするので，窓の幅も周波数も 2 進変化となるが，ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換では，窓の幅も周波数も任意にとることができる．

また，両者の違いを形式的に観察するとガウス関数を用いた短時間フーリエ変換を行う際には，窓の幅を表す指標 α と振動数 ω を定める必要があるが，ウェーブレット展開では，ひとつの変数スケールファクタ j を変化させることにより，相似的にこれらを変化させていることに特徴があるといえる．

したがって，ウェーブレットは j に対して相似形を保っているので，モーメントコンディション $\int_{-\infty}^{+\infty} t^m \psi_{j,k}(t)\,dt = 0\,(m \in \mathbf{Z}_+)$ が任意の j とある正の整数より小さい任意の非負の整数 m に対して成立しており，このために，j の値を小さくして，見

かけ上の窓の幅を狭くしても，時間に対して，図 12.2 に示した傾斜部のように緩やかな動きは検出しない．すなわち，ウェーブレット $\psi_{j,k}(t)$ と図 12.2 に示した傾斜部のように時間に対して緩慢な信号 $\tilde{f}(t)$ との内積は 0 となる．すなわち，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t)\overline{\psi_{j,k}(t)}\,dt = 0 \tag{12.17}$$

これは，モーメントコンディションで，$m=0$ としたときは，$\int_{-\infty}^{+\infty} \psi_{j,k}(t)\,dt = 0$ であり，正負の面積が 0 となることから容易に理解される．

このように，図 12.2 に示した傾斜部のように時間に対して緩慢な動きは，ウェーブレットの j の値を変化させても，検出されることはないが，ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換では，α の値を小さくして，窓の幅を狭めると振動数の低い部分では，モーメントコンディションが崩れて，δ 関数に近づくので，δ 関数の関数の再生能力より，信号との内積は信号を再生する．すなわち，

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f}(t)\,\overline{G_{b,\omega}^{\alpha}(t)}\,dt = \tilde{f}(b) \qquad (\text{for} \;\; \alpha \to 0 \;\; \text{and} \;\; \omega \to 0) \tag{12.18}$$

以上，総合して言えば，ウェーブレット解析は，周波数領域での変化をスケールファクター j を動かすのみで検知できるので，窓幅と周波数の両方を指定しなければならないガウス関数を用いた短時間フーリエ変換より操作が簡単である．しかし，ノイズの中から不連続信号を検出する場合に，窓幅と周波数を適切に選ぶことができれば，その検出能力は S/N 比の観点より見るとガウス関数を用いた短時間フーリエ変換の方が優れている．それゆえ，連続監視にはウェーブレット解析を用いて不連続波形を検出し，より精緻にこれを見るときに短時間フーリエ解析を用いるなど，両者をハイブリッドして用いることも有効であろう．

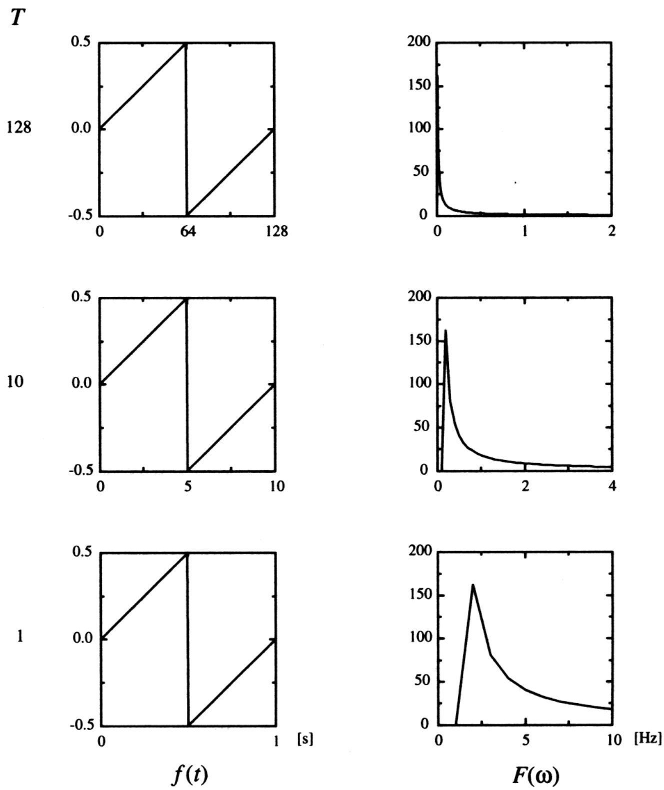


図 12.2 不連続波形 $f(t)$（$T = 1.0, 10, 128$ 秒）とそのフーリエ変換

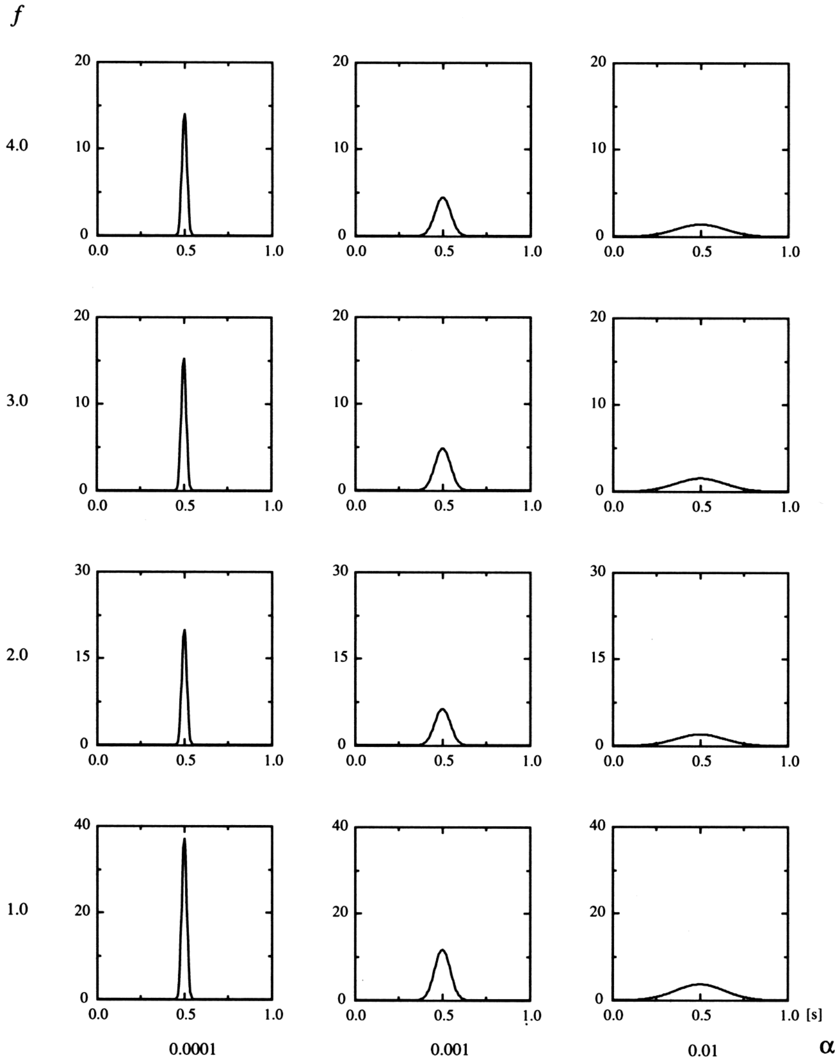


図 12.3　不連続波形 $f(t)$（$T = 1.0$ 秒）のガウス関数を用いた短時間フーリエ変換

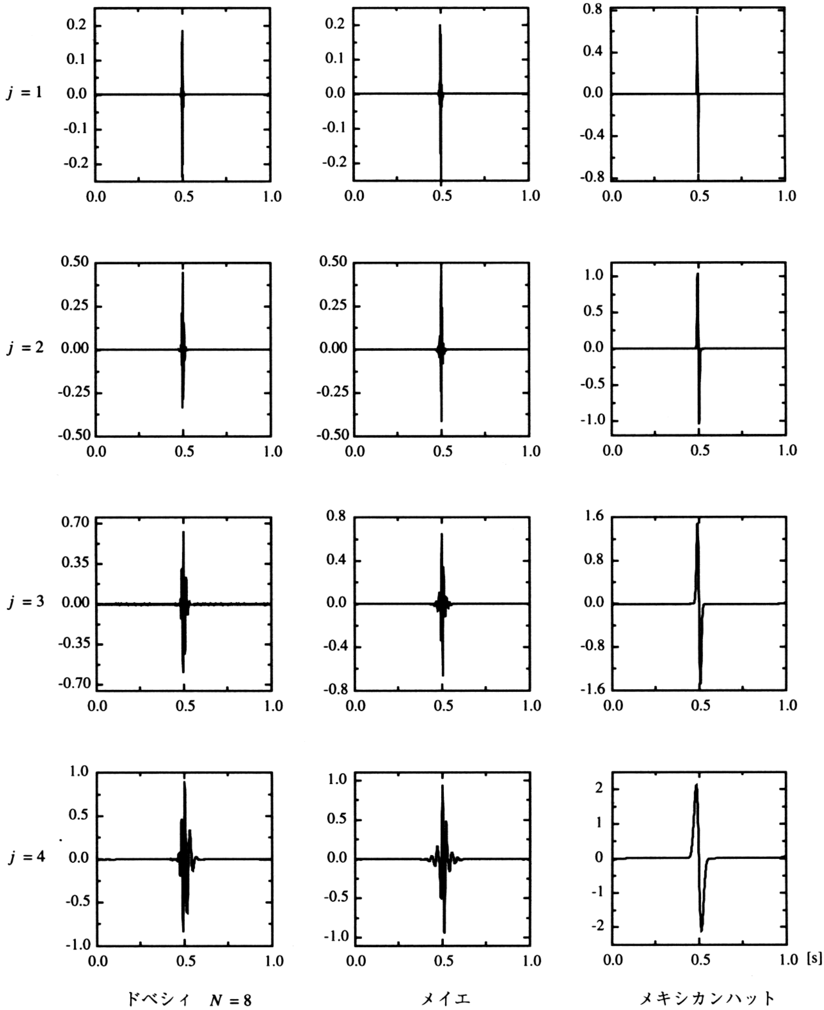


図 12.4 不連続波形 $f(t)$ ($T = 1.0$ 秒) のウェーブレット展開係数

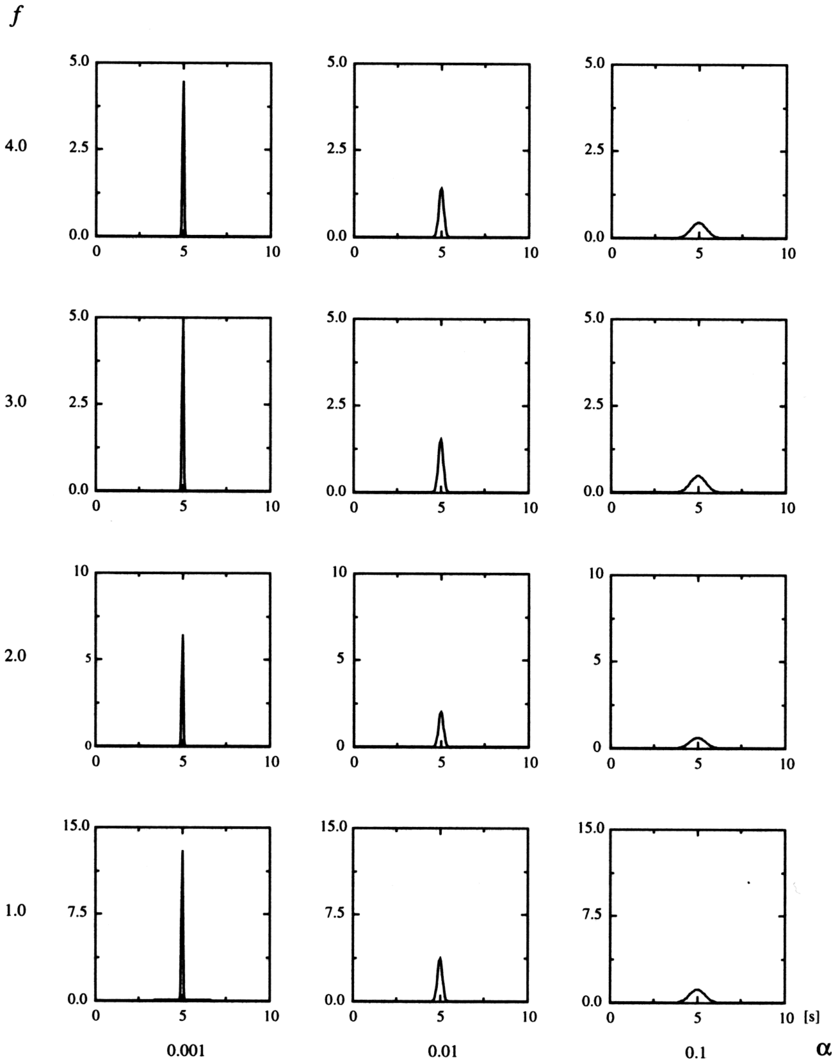


図 12.5　不連続波形 $f(t)$（$T = 10$ 秒）のガウス関数を用いた短時間フーリエ変換

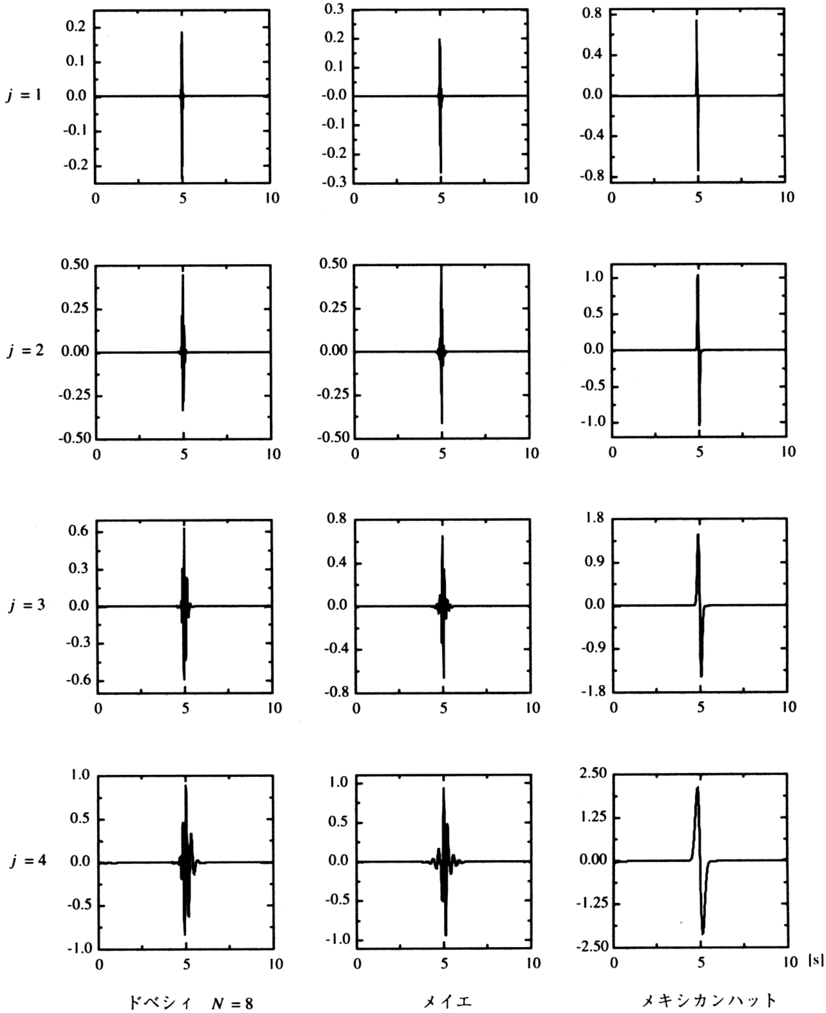


図 12.6　不連続波形 $f(t)$（$T = 10$ 秒）のウェーブレット展開係数

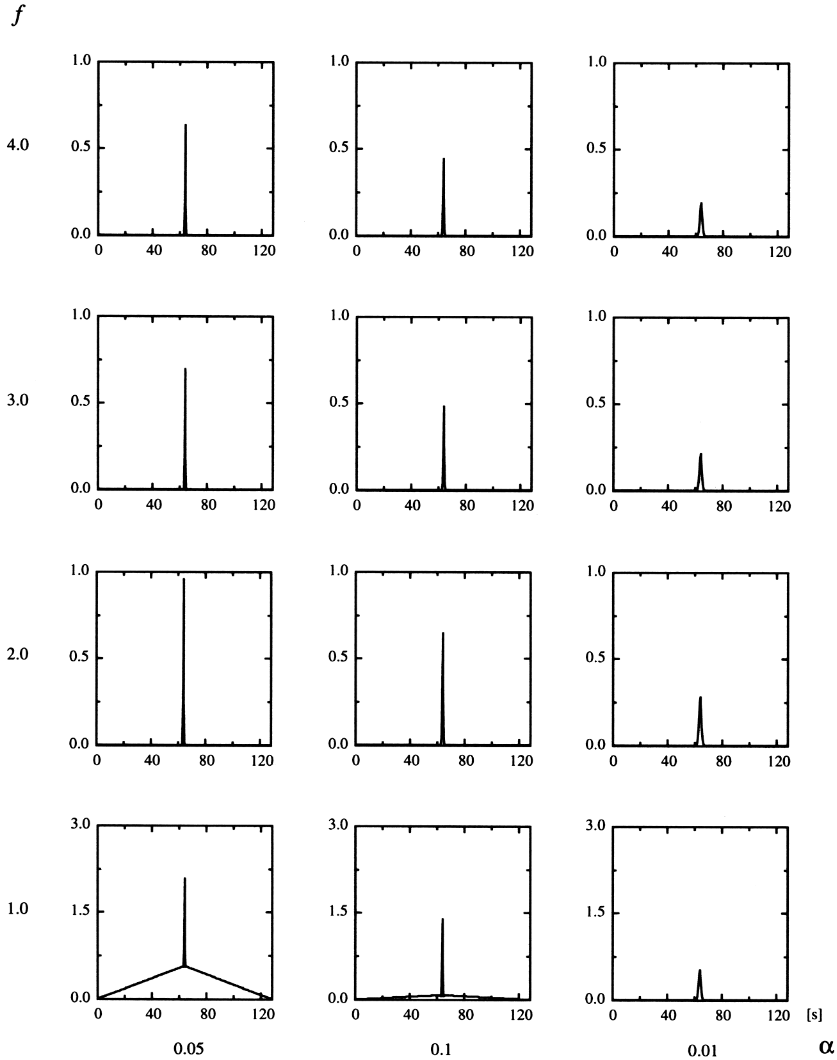


図 12.7　不連続波形 $f(t)$（$T = 128$ 秒）のガウス関数を用いた短時間フーリエ変換

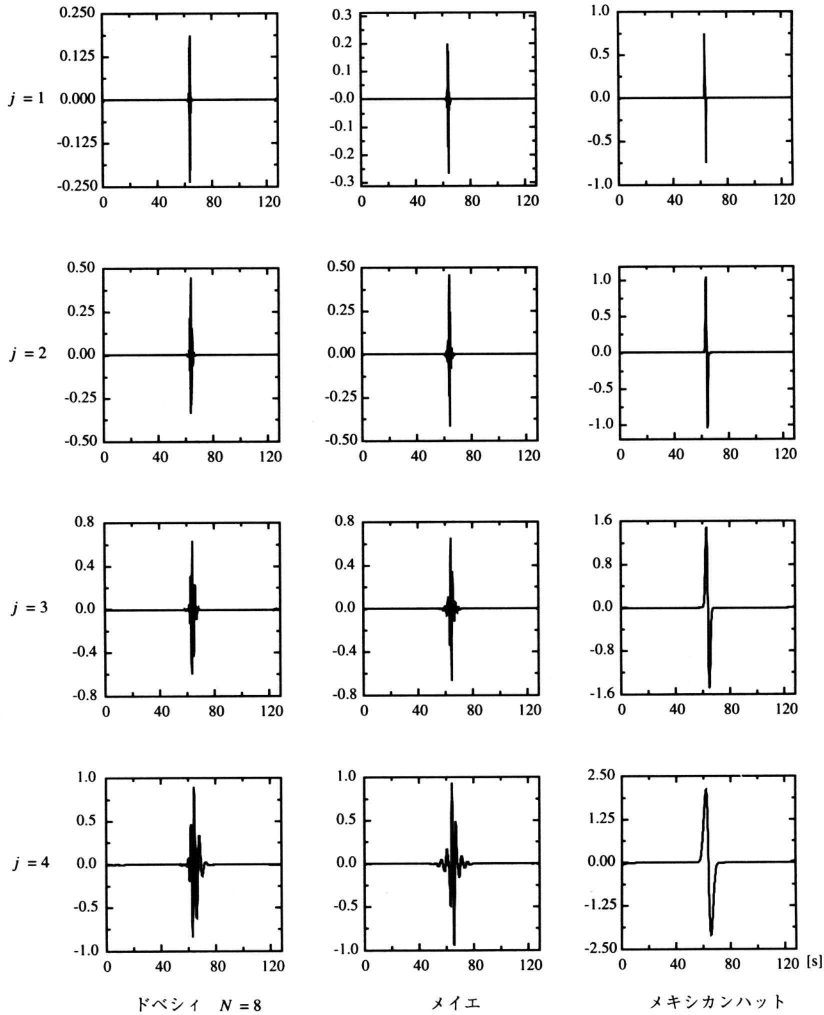


図 12.8　不連続波形 $f(t)$（$T = 128$ 秒）のウェーブレット展開係数

12.3　雑音に覆われたパルス波形検出の例

風荷重や地震動を受ける構造物，あるいはたえず大なり小なりの振動している列車，航空機，各種プラント等は徐々に疲労している．そこで，これらの機械・構造物の供用中の振動や音を観測し，これを解析することにより，機械・構造物系の疲労の程度を知ること，すなわち，**ヘルスモニタリング**は重要な課題である．

もし，このヘルスモニタリングが適切に行われるならば，機械・構造物の疲労による破壊は未然にこれを防止することができる．例えば，航空機の隔壁の破壊に伴なった墜落事故，外国の事例に見られる橋梁の落下事故等は未然に防止されたはずである．また，ヘルスモニタリングは事故の未然の防止のみらず，適切なメンテナンスを実施する上で重要である．すなわち，ヘルスモニタリングの実施を通じて，部材の損傷の程度を把握して損傷部品の修復や取替えの判断を行うことができる．

しかし，このようにヘルスモニタリングを実施する上での困難は部材の損傷の進展を示す異常信号の大きさは極めて小さく，しかも，雑音に覆われている点である．すなわち，疲労損傷が発生する状況は航空機の運行中の状態を想像すればわかるように，不規則な動荷重にさらされている．この動荷重より発生する背景雑音は極めて大きく，一方，疲労による損傷の進展に伴って発生する異常信号は極めて小さいと想像される．

したがって，ヘルスモニタリングシステムの構築上のキーポイントはいかに効率的に雑音の中から，微小な異常信号を検出するかということである．ここでは，ウェーブレット解析が，異常信号の検出に非常に強力な特性を有することを利用する．

その効果を図 12.9 の乗用車のサスペンションとそのモデル図について検証する．この図は (b) 図のサスペンションを (a) 図に示すバネ k と減衰 c で表し，路面の凹凸に伴った車輪から受ける加速度と質量 m との積を車体に外力 $f(t)$ として与えた図

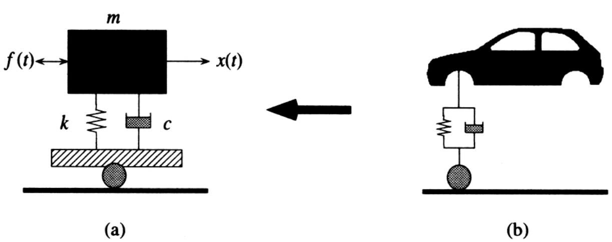


図 12.9　乗用車のサスペンションとそのモデル図

である．この $f(t)$ の中にサスペンションの損傷の進展に伴って異常信号が $t=32$ と 80 秒に発生したとする．この外力による車体の応答波形をウェーブレット展開して，その展開係数の値より異常信号の検出を試みる．

入力 $f(t)$ は，白色雑音を，中心周波数 $\omega_f = 2\pi/4$ [rad/s]，減衰比 $\zeta_f = 0.5$ の狭帯域のフィルタに入力して，その出力をとって生成した．雑音 N_0 と信号 S の大きさの比，$S/N_0 = 1.5$ の例をとって図 12.10 に図示した．$t=32$ と 80 秒に入れたパルス信号を ∇ 印で示した．図 12.9 に示した系の運動方程式は

$$m\ddot{x}(t) + c\dot{x}(t) + kx(t) = f(t) \tag{12.19}$$

であり，ここでは $\omega_0 = \sqrt{k/m} = \pi$ [rad/s]，$\zeta_0 = 2/2\sqrt{mk} = 0.05$ とした．

この運動方程式の解 $x(t)$（狭帯域フィルタ出力）を求めて，図示したのが図 12.11 である．この図からは入力 $f(t)$ に印荷したパルスは目視からは観察できない．

そこで，この出力波形 $x(t)$ をウェーブレット変換し，これよりパルス信号の検出をすることを試みた．出力波形 $x(t)$ からパルス信号の検出を行う前に，入力 $f(t)$ のガウス関数を用いた短時間フーリエ変換を行ったものが図 12.12 である．この図から，振動数 f が 3 [Hz] のときから，わずかながら雑音が検出され，2 [Hz] では更にこれが拡大され，1 [Hz] では，雑音の成分が大きくなり，$\alpha = 0.05$ の場合等では，雑音の成分が大きくなり信号が検出できない．

同じく，入力 $f(t)$ のウェーブレット変換を図 12.13 に示す．$j=1$ のとき，ドベシィ，メイエのウェーブレットではパルス信号を明瞭に識別している．一方，メキシカンハットでは，雑音の成分が大きくて，パルス信号の識別は明らかでない．次に，出力信号 $x(t)$ のガウス関数を用いた短時間フーリエ変換とウェーブレット変換を図 12.14 と図 12.15 に示す．パルス信号の検出傾向は入力信号 $f(t)$ からの検出とはほぼ同じである．

次に N の値が小さいドベシィのウェーブレットを使ったときに，どうなるかを以下に検討した．図 12.16 にドベシィのウェーブレット $N=3$ を使って入力波 $f(t)$ と出力波 $x(t)$ をウェーブレット展開して図示した．この図より明らかなようにドベシィの $N=3$ のウェーブレットを使った場合に入力波 $f(t)$ に含まれる異常信号（パルス信号）は検出することができるが，出力波 $x(t)$ からは，これらを検出することができない．出力波 $x(t)$ は，式 (12.19) に示した 2 階の微分方程式からの出力であり，入力 $f(t)$ の中に含まれる異常信号（パルス信号）は検出するためには，2 つの積分器を遡及しなければならない．換言すれば，使用するウェーブレットは 2 回微分可能でなければならない．

詳しい解析によると $\lambda(6) = 1.888$, $\lambda(7) = 2.158$（ドベシィの本 [13] p.232）であることが知られているので，数学的にウェーブレットの 2 回微分可能性を保障するためにはウェーブレット生成指数は $N = 7$ 以上とる必要があることがわかる．

それゆえ，図 12.16 にて，出力波 $x(t)$ のウェーブレット変換にドベシィのウェーブレットの $N = 3$ を用いると，入力波に含まれる異常信号を検出できない理由がわかる．

それゆえ，図 12.15 に示した $t = 32$ [s] と $t = 80$ [s] にパルス信号を有する入力波 $f(t)$ としたときの (12.19) の出力，すなわち，中心周波数 $\omega_0 = \pi$ [rad/s]，減衰比 $\zeta_0 = 0.08$ の狭帯域フィルタからの出力のウェーブレット変換に用いたドベシィのウェーブレットには，前述した $\psi(t) \in C^{\lambda(N)}$ $(\lambda(N) = 2)$ の条件より $N = 8$ を採用している．

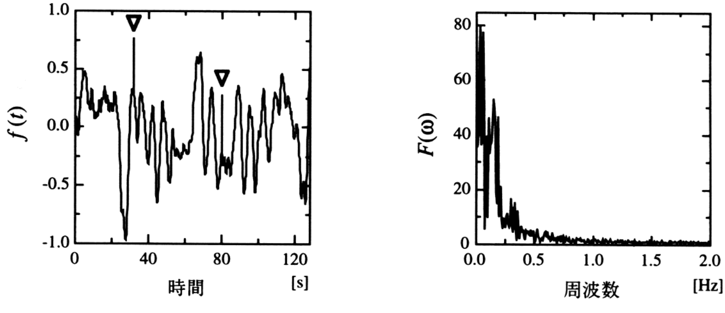
次に，ウェーブレットとガボール関数の異常信号検出の能力を検討しょう．まず，ドベシィのウェーブレットで，種々の S/N_0 の出力 $x(t)$ についてウェーブレット解析を実施して，パルス信号のピーク値がノイズレベルの 4 倍以上あれば検出可能ということにして，そのパルス信号検出の限界を求めると図 12.17 のようになる．この図より，$N = 6$ 以上をとれば $S/N_0 = 0.2$ 程度まで検出可能であることを示している．

次にガボール関数による入力波，出力波に含まれるパルス信号の検出能力を入力波 $f(t)$ については図 12.18 に出力波 $x(t)$ については図 12.19 に示す．このように，最適の窓幅を示す指数 α と周波数 ω がわかっているならば，$S/N_0 = 0.05$ まで検出できるので，周波数の分解能はウェーブレット解析より約一桁あげることができるといえる．

しかし，一般的には連続監視を行う場合に最適な α と ω のわかっていないことが普通であり，この最適な組合せをはずれると，短時間フーリエ変換の異常信号の検出能力は急激に低下する．

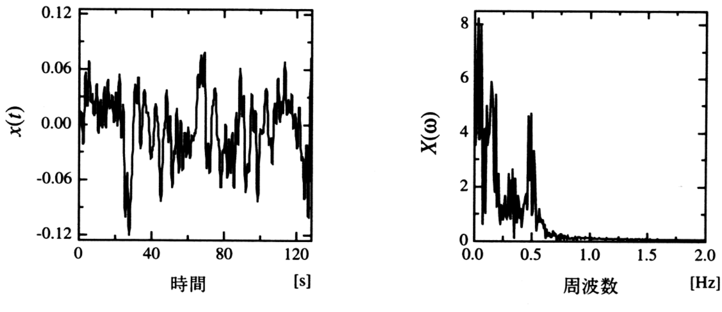
このように環境の変化に敏感な短時間フーリエ解析に比べて，ウェーブレット解析は環境の変化に対してロバストであるので，異常信号の発生を監視するモニタリング等には，ウェーブレットの方が適していると言えよう．

本項の執筆に当たっては次の論文を参考にした．
「ウェーブレット変換を用いた機械・構造物のヘルスモニタリングシステム」日本機械学会論文集（C編）61 巻 586 号（1995–6）（曽根，山本，有馬，増田，中岡）



(a) $f(t)$　(b) $F(\omega)$

図 **12.10**　$t = 32$ と 80 秒にパルス信号を有する入力波 $f(t)$（$S/N_0 = 1.5$）- (a) とそのフーリエ変換 - (b)



(a) $x(t)$　(b) $X(\omega)$

図 **12.11**　$t = 32$ と 80 秒にパルス信号を有する入力波 $f(t)$ の狭帯域フィルタ出力 $x(t)$ - (a) とそのフーリエ変換 - (b)

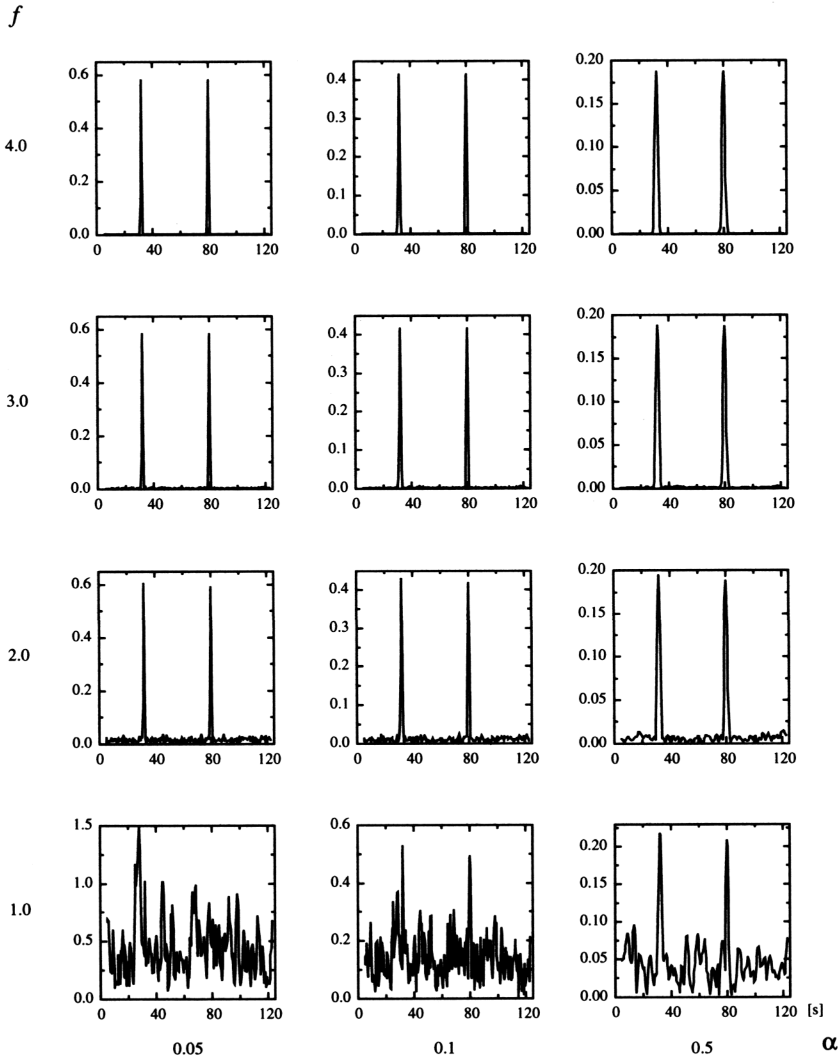


図 12.12 信号 $f(t)$ のガウス関数を用いた短時間フーリエ変換（$S/N_0 = 1.5$）

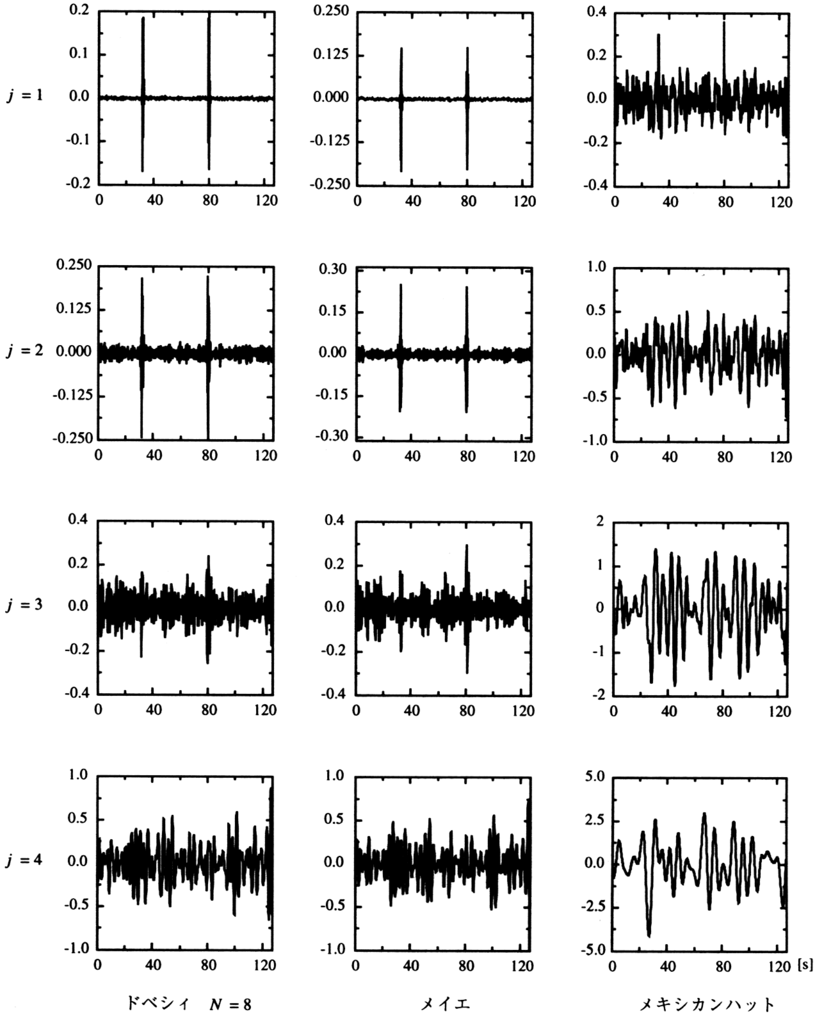


図 12.13　信号 $f(t)$ のウェーブレット展開係数（$S/N_0 = 1.5$）

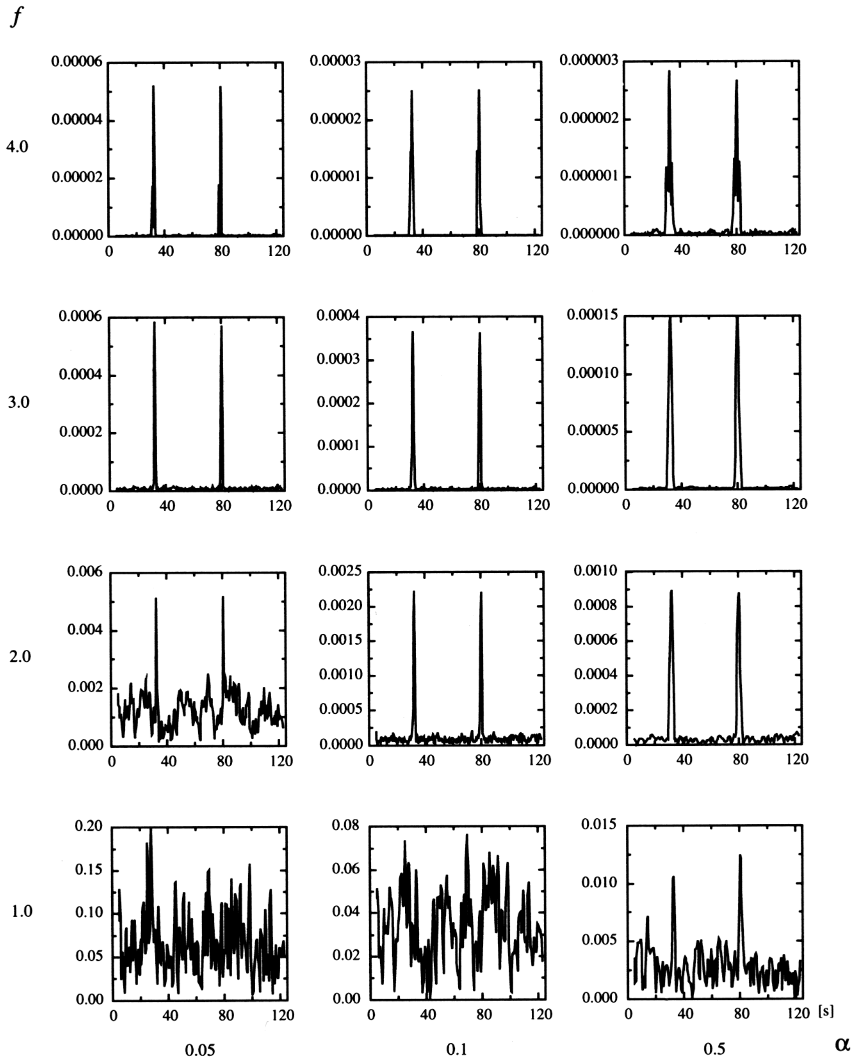


図 12.14　信号 $x(t)$ のガウス関数を用いた短時間フーリエ変換（$S/N_0 = 1.5$）

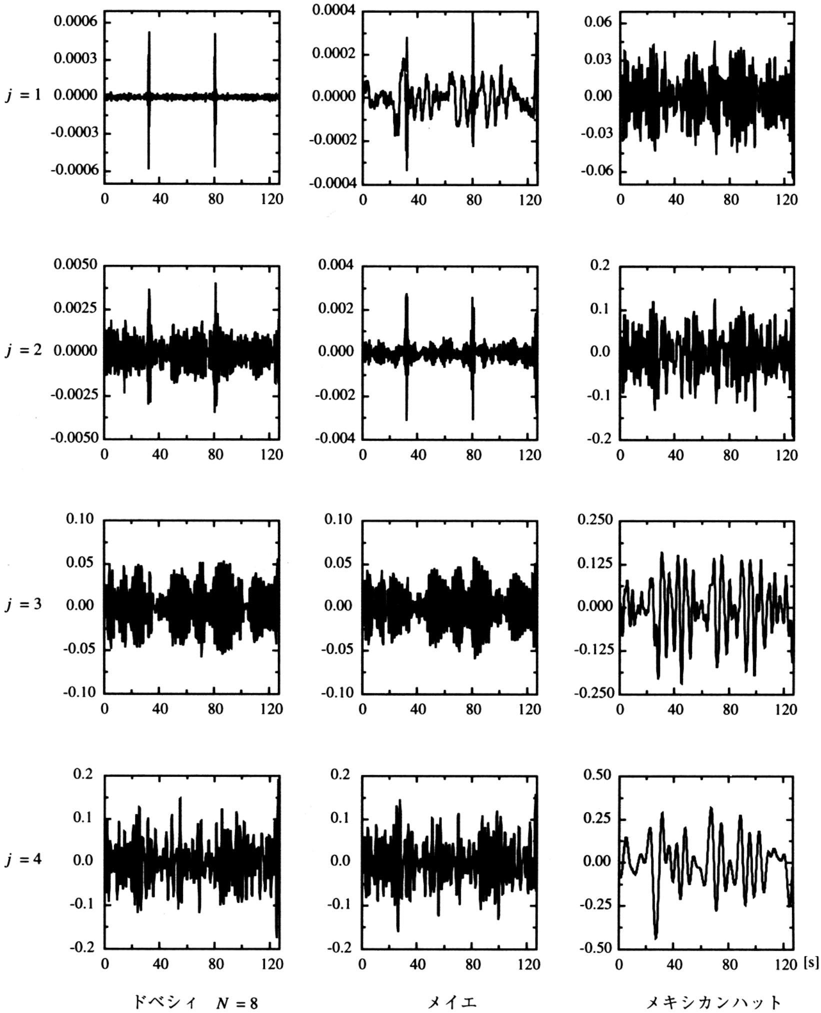


図 12.15 信号 $x(t)$ のウェーブレット展開係数（$S/N_0 = 1.5$）

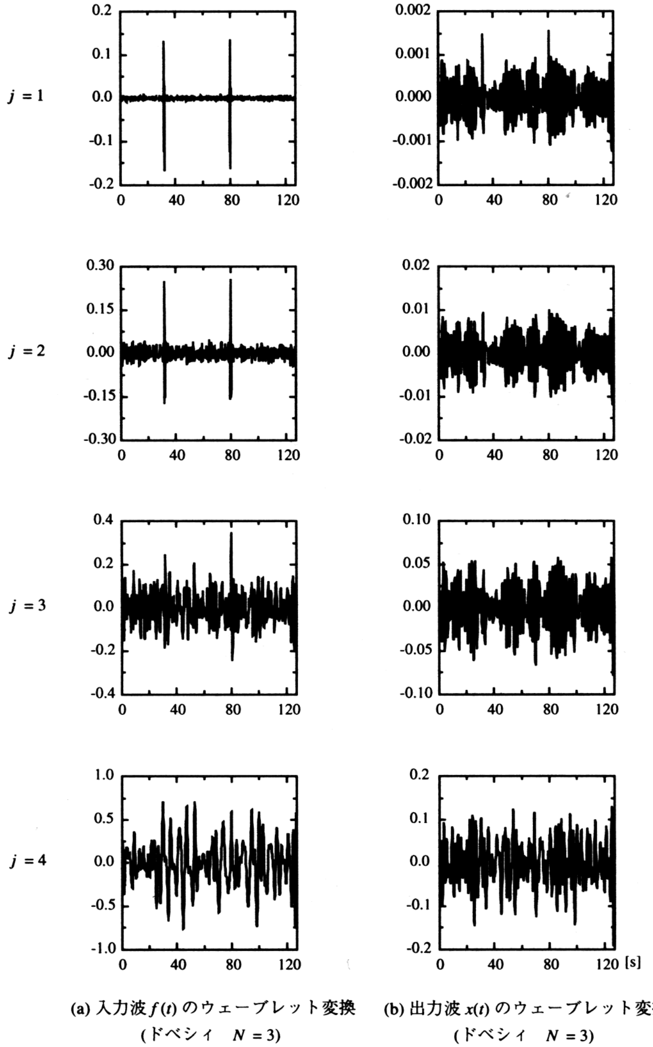


図 12.16　レギュラリティの低いドベシィのウェーブレット（$N = 3$）による信号 $f(t)$ と $x(t)$ のウェーブレット展開

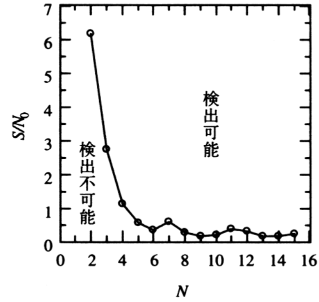


図 12.17 ドベシィのウェーブレット指数とウェーブレット展開による入力信号 $f(t)$ に含まれるパルス信号検出限界図

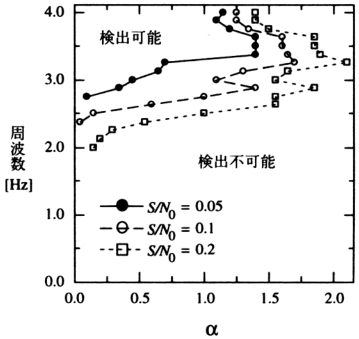


図 12.18 ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換による入力信号 $f(t)$ に含まれるパルス信号検出限界図（$\omega_f = \pi/4$ [rad/s]，$\zeta_f = 0.5$）

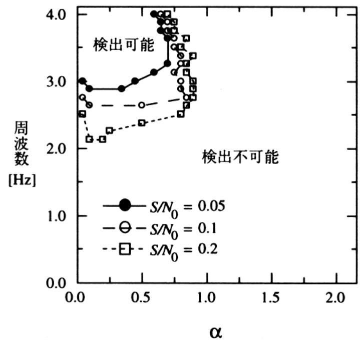
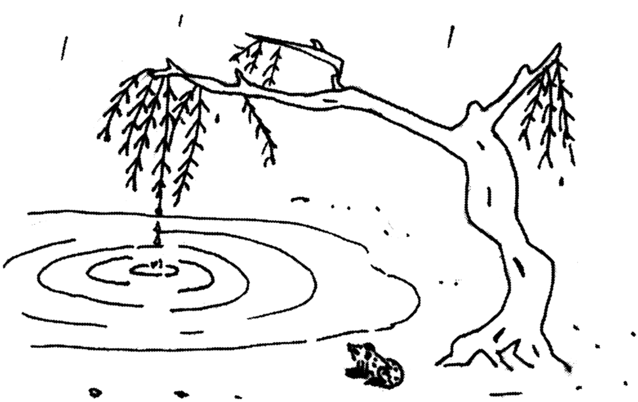


図 12.19　ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換による出力信号 $x(t)$ に含まれるパルス信号検出限界図（$\omega_0 = \pi$ [rad/s]，$\zeta_0 = 0.5$）



12.4　機械・構造物系の地震時の累積損傷の検出

阪神大震災では，多数の建築物が強い地震動によって損傷を受けた．その建築物の損傷の程度を定量的に把握することは，その建築物の今後の供用の可否を判断する上で極めて重要である．また，供用が可であると判断された場合でも，修復が必要とされることが多く，その修復の程度・方法を定める上で，損傷の程度の定量的な把握は不可欠である．しかし，現在では，建築物の損傷の程度は，経験者による目視を主体とした検査とその結果のマニュアルとの照合によって行われており，その損傷認定に定量的，機械的手法の導入が強く要望されている．強い地震によって生ずる構造物の累積損傷は，地震の継続時間 20 ～ 30 秒間に生ずるサイクル数が極めて少なく，振幅の極めて大きい低サイクル疲労現象によるものと考えられる．

履歴復元力特性を有する建築物が強震動を受けて，弾性域から塑性域に移る際に（復元力特性の図でコーナー点を通過する際に），復元力が急激に弱くなるので，加速度応答に不連続性が生じる．この不連続はウェーブレット展開によって適切に検出可能であると考えた．このような解析を通じて，塑性率 η（地震時の変位／降伏変位）が 1 を超える回数がわかれば，累積損傷を認定する上での重要な情報を得ることができると考えた．

解析に用いた建築物のモデルは図 12.20 に示したような 1 質点 1 自由度系である．図中で，m は質量，c は減衰係数，$f(x)$ は履歴復元力特性，$\ddot{u}_g$ は地震動加速度で，ここでは白色雑音とした．履歴復元力特性 $f(x)$ を図 12.21 に示した．

まず，例として，$\alpha_f = 0.5$ の場合で入力の最大加速度 300 [cm/s^2] の場合の入力加速度，応答加速度，相対応答変位の時刻歴を図 12.22 (a)，(b)，(c) に示す．図 12.22 (c) の点線は降伏変位 $x_y = 2.7$ [cm] を示し，これを超える変位が生じると塑性変形

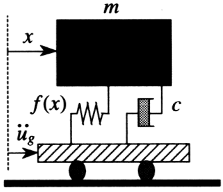


図 12.20　建築物を模擬した 1 質点形モデル

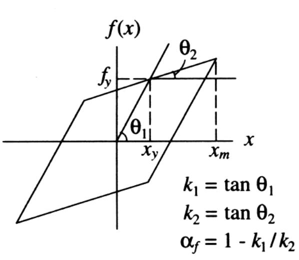


図 12.21　履歴復元力特性

が生じることになる．この点線は $2x_y$ の幅をもって上下にずれているのが見られるが，塑性域によって 0 点が移動したことによって生じたものである．図をみると，4 秒付近で負側に，6.5 秒付近で正側に若干の塑性域への突入が見られるし，11.5 秒付近では大きく正側に，16 秒では大きく負側に突入している様子が見られる．ここでの例は，1 質点系のシミュレーションであるので，相対変位が解析により図示されているが，一般的には相対変位は計測できなくて，絶対加速度のみが観測される．図 12.22 (b) を観察すると図 12.22 (c) で見られた塑性域への突入に際し，剛性が急変しているはずで，それに伴って加速度に異常（不連続性）が生じているはずであるが，この加速度波形を目視するのみでは，この異常を識別することは不可能である．

そこで，この加速度記録にウェーブレット展開をほどこして，目視では見つけることができなかった加速度波形に含まれる異常（不連続性）を抽出して，履歴復元力特性系の塑性域への突入を推定し，その回数と大きさから累積損傷を計測することとした．このような目的にウェーブレット展開を応用することは，多重解像度解析に原点を置いた最も適切なフィルタを選出することを意味する．また，一口にウェーブレットと言っても，ウェーブレットの選択は無数にあり，その中からどのウェーブレットが本解析に適しているかどうかを判定することも本研究の目的のひとつである．そこで，ここでは，3 種類のウェーブレット（メキシカンハット，ドベシィ，メイエ）を取り上げ，その有効性を検討することとした．ウェーブレット変換を適用する前に入力加速度の大きさに応じた塑性域への突入の様子を見るために $\alpha_f = 0.5$ の場合の相対変位応答を図 12.23 に示す．$275, 300, 350$ [cm/s^2] と入力の最大加速度が大きくなるに従って塑性域への突入の程度が大きくなっているのが見られる．

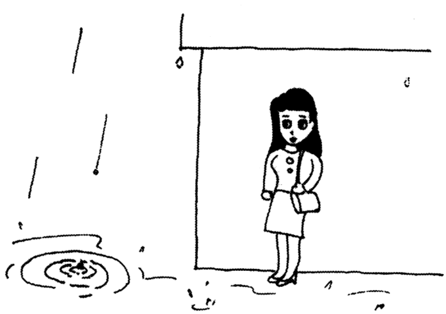
次に，各加速度の大きさ毎に加速度波形をウェーブレットを用いてウェーブレット展開し，不連続性の検出のためにその周波数に見合った高周波のウェーブレット ($j = -10$) のウェーブレット係数 $\alpha_{j=-10,k}$ をメキシカンハット，ドベシィ，メイエの順に図 12.24，図 12.25，図 12.26 に図示した．これらの図でパルス的な信号が見られるが，これは建築物の応答が弾性域から塑性域に入るときに剛性の急変に伴って生じる加速度の不連続性を検出しており，換言すれば復元力のコーナー部の通過時点を表していると言える．したがって，パルスの数が建物が塑性変形を起こした回数に対応する．これらの図より，当然ながら入力加速度の最大値が大きくなるにつれて，パルスの数が増加しているので，応答が塑性域に入る回数が多くなっていることがわかる．これは，3 種類のウェーブレット共に同様な傾向である．さらに，3 種類のウェーブレットの結果を注意して比べると，入力加速度が大きいところでは 3 者ともパルスが鮮明に発生していることがわかるが，入力加速度が小さいところの 275 [cm/s^2]

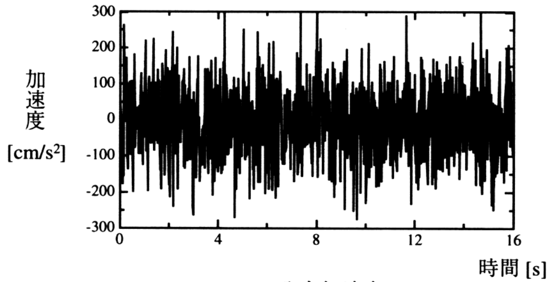
ではメイエのウェーブレットによる検出能がメキシカンハット，ドベシィのウェーブレットによるものより優れているのがわかる．これは信号の不連続性の検出に用いるウェーブレットの正則性（滑らかさ）やバニシングモーメントが関係しており，正則性が高いウェーブレットほどパルスが顕著に出ることが知られている．メイエのウェーブレットがバニシングモーメントの次数が最も大きく正則性が高いので，上記の結果は妥当であると考えられる．

そこで，最も鮮明にパルスの発生を検知できるメイエのウェーブレットを取りあげ，図 12.23 の相対変位応答の図より各入力地震の大きさに応じた塑性域に突入する回数を読み取り，これを真値としてウェーブレット展開係数の時刻歴より読み取ったその推定回数を除して，地震の大きさに応じて描いたのが図 12.27 である．この図より α_f が大きく，$\alpha_f = 1.0$ に近づくほど，すなわち履歴復元力が完全弾塑性に近いほど，ウェーブレット変換により得られた推定値は真値に近くなることがわかる．また，地震の入力レベルが小さくて，塑性変形の量が小さいところでは誤差が大きくなっていることがわかる．これらの現象は総じて物理的な直観と整合している．

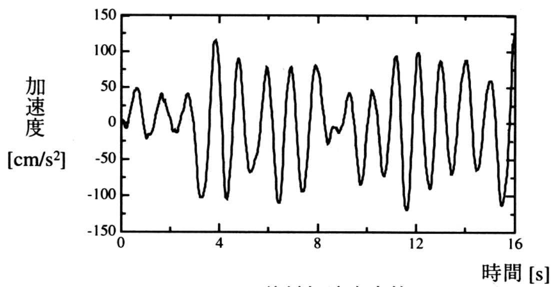
このようにして，地震記録を分析することによって，地震時に塑性域への突入回数を推定することができるので，累積損傷を推定する重要な情報を得たといえる．

本項の執筆に当たっては次の論文を参考にした．
「強震記録のウェーブレット解析による履歴復元力特性を有する建築物の累積損傷の推定」日本建築学会構造系論文集，第 476 号，67–74,（1995–10），（曽根，山本，増田，中岡，芦野）

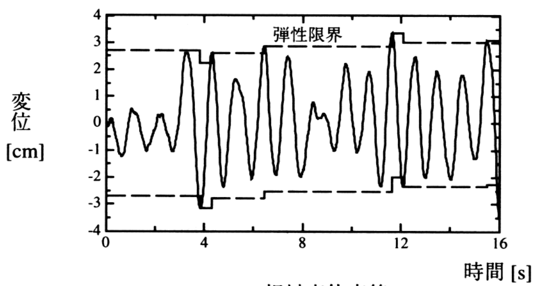




(a) 入力加速度

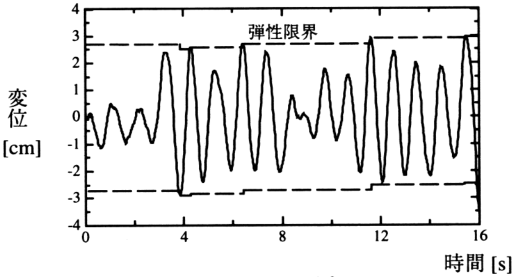


(b) 絶対加速度応答

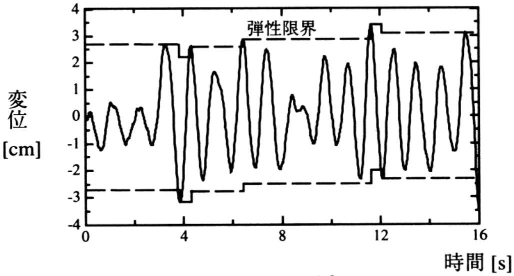


(c) 相対変位応答

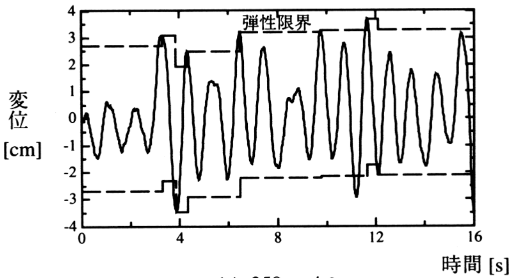
図 12.22 入力波形と応答波形（$\ddot{u}_{g\ \max} = 300$ [cm/s^2]，$\alpha_f = 0.5$）



(a) 275 cm/s²



(b) 300 cm/s²



(c) 350 cm/s²

図 12.23　相対変位応答

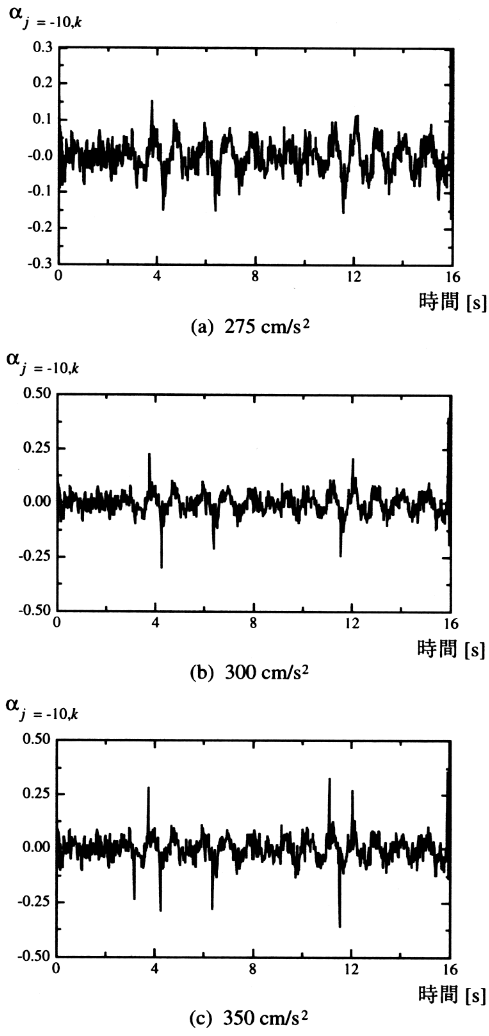
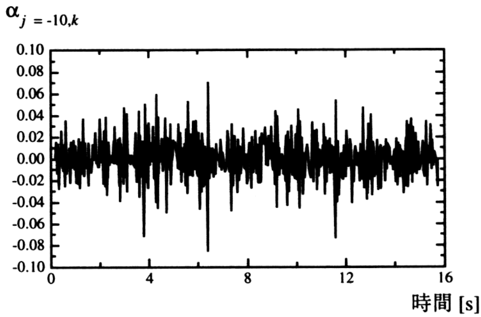
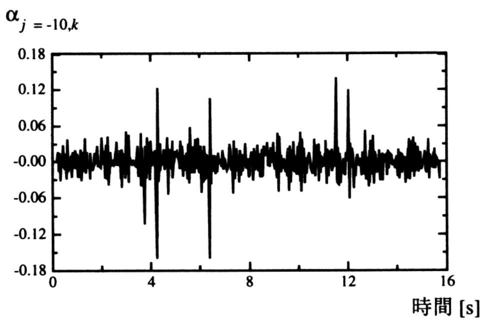


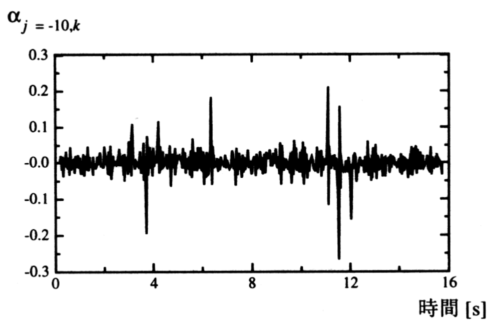
図 12.24　加速度応答のウェーブレット展開係数（メキシカンハット，$\alpha_f = 0.5$）



(a) 275 cm/s²

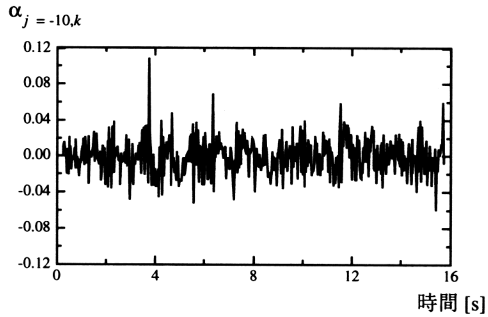


(b) 300 cm/s²

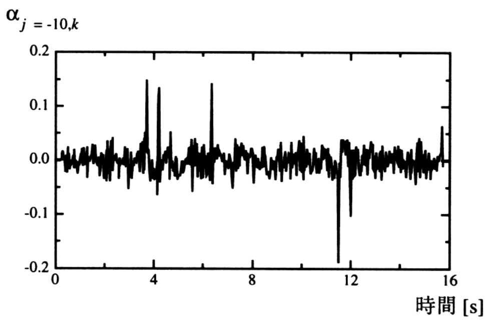


(c) 350 cm/s²

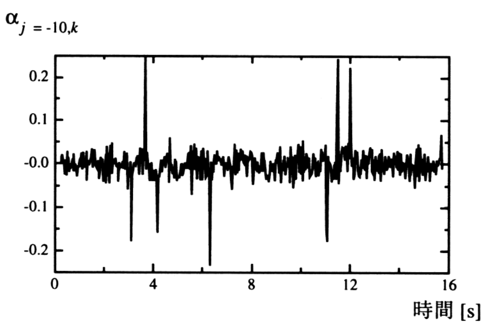
図 12.25　加速度応答のウェーブレット展開係数（ドベシィ，$N=8$，$\alpha_f=0.5$）



(a) 275 cm/s^2



(b) 300 cm/s^2



(c) 350 cm/s^2

図 12.26　加速度応答のウェーブレット展開係数（メイエ，$\alpha_f = 0.5$）

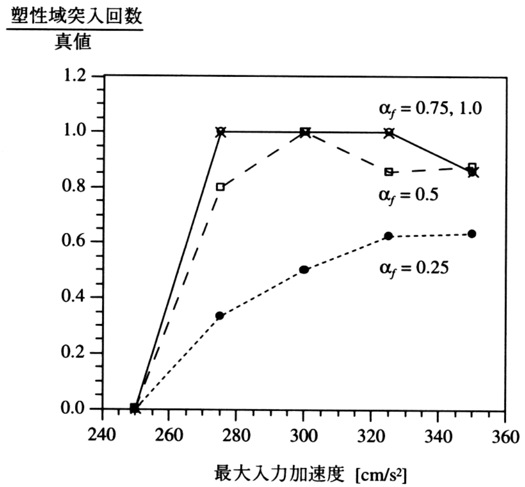
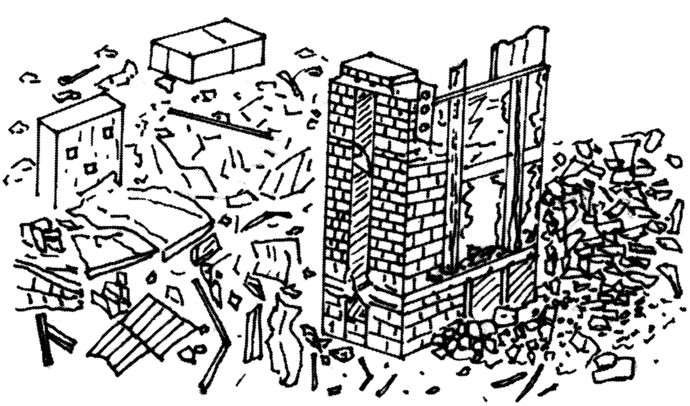


図 **12.27**　塑性域の突入回数の推定値と真値の比



第 13 章

相似相関の検出

13.1　相似相関検出の原理

2 つの信号 $x(t)$ と $y(t)$ の（時間領域における）相互相関関数 $\phi(\tau)$ は

$$\phi(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\overline{y(t+\tau)}\,dt \tag{13.1}$$

で定義される．

この相互相関関数の性質を調べるために次のシュワルツの不等式を思い出そう．簡単のため，関数 $f(t)$ と $g(t)$ は実数値関数とする．

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\,dt\right| \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2\,dt\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)^2\,dt\right)^{1/2} \tag{13.2}$$

ここで等号はある実数 λ に対して，$g(t) \equiv \lambda f(t)$ とかけるときに限る．また，これ以後

$$||f|| := \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)^2\,dt\right)^{1/2}$$

とかき，$||f||$ を f のエネルギーノルムと呼ぶ．f を固定し，g のエネルギーノルム $||g||$ を一定に保ちながら g を変形したときの (13.2) の左辺の最大値を考えてみよう．シュワルツの不等式の等号成立条件を考えれば，$g(t) \equiv \lambda f(t)$ とかけるとき，(13.2) の左辺の最大値は $|\lambda| \cdot ||f||^2$ である．ここで，$g(t) := \lambda f(t) - h(t)$ とおき，簡単な計算をしてみよう．

$$\left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\,dt\right| \quad = \quad \left|\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\{\lambda f(t) - h(t)\}\,dt\right|$$

$$
\begin{aligned}
&\geq |\lambda| \cdot ||f||^2 - \left| \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)h(t)\,dt \right| \\
&\geq |\lambda| \cdot ||f||^2 - ||f||\,||h|| \qquad (13.3)
\end{aligned}
$$

この式は $||h||$ が小さいとき，積分値

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)g(t)\,dt \qquad (13.4)$$

の絶対値は最大値 $|\lambda| \cdot ||f||^2$ に近いことを示している．さらに，恒等的に 0 でない 2 つの関数 $f(t)$ と $g(t)$ が本質的に同符号なら $\lambda > 0$ となり，積分値 (13.4) は正の値をもつことに注意しよう．このとき，関数 $g(t)$ を適当に縦軸方向に $\lambda > 0$ 倍拡大して $f(t)$ に近い形であるなら，積分値 (13.4) は最大値 $\lambda||f||^2$ に近いことになる．

2 つの信号 $x(t)$ と $y(t)$ は実数値とし，この不等式 (13.4) を $f(t) := x(t), g(t) := y(t+\tau)$ として相互相関関数に適用してみよう．

上に述べた議論より τ を固定したときには，相互相関関数は 2 つの信号 $x(t)$ と信号 $y(t)$ を $-\tau$ だけ平行移動した信号 $y(t+\tau)$ を縦軸方向に適当に拡大していき，λ 倍したときに一番よく似た図となることを示した図である.（図 13.1 の上段の図を参照.）

τ を動かしたときはどうであろうか．たとえば相互相関関数を最大にする τ が何を意味するのかを考えてみよう．直観的には，信号 $y(t+\tau)$ の縦軸方向に拡大縮小した信号が信号 $x(t)$ に最も似た形となる位置を τ を動かすことによりさがし出しているのであり，図 13.1 の中段の図で $x(t)$ の左のピーク値を合わせたものが最大値となり，右のピーク値に合わせたものは 2 番目のピーク値となる.（図 13.1 の中段の図を参照.）

例 13.1.1　信号 $x(t)$ を

$$x(t) = \frac{10}{(10t-3)^2+1} - \frac{10}{(10t-6)^2+2} + \frac{10}{(10t-9)^2+4} - \frac{3}{5}$$

とおき，信号 $y(t)$ を

$$
\begin{aligned}
y(t) &= -50t^2 + \frac{9}{8} && \left(-\frac{3}{20} \leq t \leq \frac{3}{20}\right) \\
&= 0 && \left(t < -\frac{3}{20},\ \frac{3}{20} < t\right)
\end{aligned}
$$

とする（図 13.2 を参照）．図 13.1 の上段および中段の概念図はこれらの 2 つの信号を使って描かれている．数値計算により相互相関関数を求めると，図 13.1 の下段の

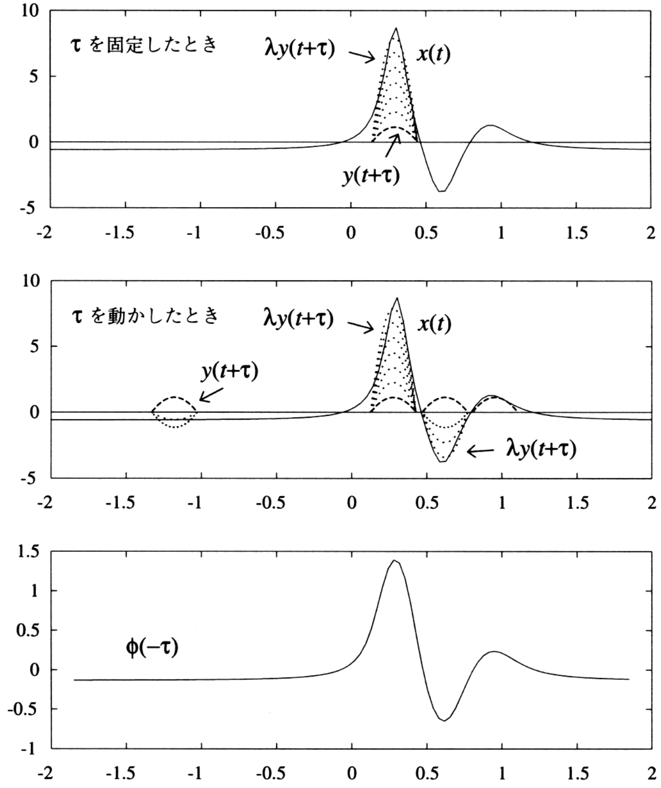


図 13.1 相互相関関数の概念図

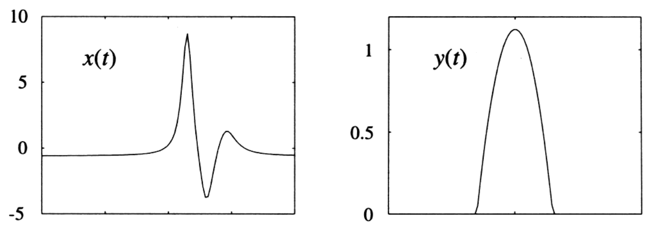


図 13.2 信号 $x(t)$ と信号 $y(t)$ のグラフ

グラフになる.(この下段のグラフでは信号 $x(t)$ と比較するため，$\phi(-\tau)$ のグラフになっていることに注意しよう.) 相互相関関数に極値を与える τ は $\tau \simeq -0.3,\ -0.6,\ -0.9$ であり，$y(t+\tau)$ のピーク値が $x(t)$ のピーク値と一致した点であり，それぞれ相関の強いことを表し，その相関の強さは $\phi(\tau) \simeq 1.4, -0.7, 0.2$ で与えられる.

次に，2 つの信号 $x(t)$ と $y(t)$ の周波数領域における相互相関関数 $\Phi(\tau)$ を 2 つの信号のフーリエ像 $\widehat{x}(\omega)$ と $\widehat{y}(\omega)$ の相互相関関数を使って

$$\Phi(\tau) \ := \ (2\pi)^{-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(\omega)\overline{\widehat{y}(\omega+\tau)}\, d\omega \tag{13.5}$$

と定義する．パーシバルの等式 $(f,g) = (2\pi)^{-1}\left(\widehat{f},\widehat{g}\right)$ によれば,

$$\begin{aligned}\Phi(\tau) &= (2\pi)^{-1}\left(\widehat{x}(\omega), \mathcal{F}[e^{-i\tau t}y(t)](\omega)\right) \\ &= \left(x(t), e^{-i\tau t}\, y(t)\right) \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\tau t}\, x(t)\overline{y(t)}\, dt \end{aligned} \tag{13.6}$$

が成り立つ.

窓フーリエ変換とウェーブレット変換の定義を思い出そう．窓関数 $w(t)$ に対し，次の積分

$$\int e^{-it\omega}\, f(t)\overline{w(t-b)}\, dt \tag{13.7}$$

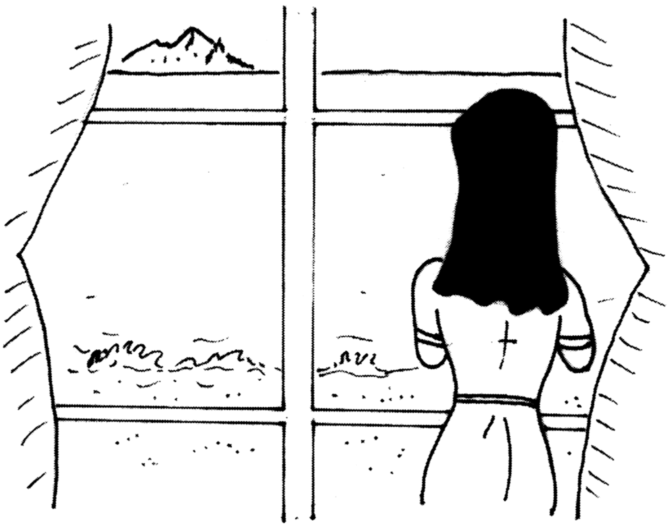
を f の窓フーリエ変換といった．一方，アナライジングウェーブレット $\psi(t)$ に対し，次の積

$$\frac{1}{\sqrt{a}}\int_{\mathbf{R}} f(t)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}\, dt \tag{13.8}$$

を f のウェーブレット変換というのであった.

ここで (13.6) は，2 つの信号のフーリエ像 $\widehat{x}(\omega)$ と $\widehat{y}(\omega)$ の相互相関関数をとり，これをパーシバルの等式によって時間領域に変換したもので，これは，(13.7) と比較すると同じ形式をしている．一方，ウェーブレット変換 (13.8) は (13.1) の時間領域での相互相関関数と同形式である．これより，窓フーリエ変換は信号 $f(t)$ と信号 $w(t-b)$ の周波数領域における相互相関関数 $\Phi(-\omega)$ であり，周波数領域における相似相関関係を検出している．一方，ウェーブレット変換は信号 $f(t)$ と信号 $(1/\sqrt{a})\psi(t/a)$ の時間領域における相互相関関数 $\phi(-b)$ を考えているので時間領域における相似相関関係を検出している．これは窓フーリエ変換が周波数領域における解析を重視し，ウェー

ブレット変換が時間領域における解析を重視しているひとつの証であるとみることもできよう.



13.2　周期関数（サイン波，方形波，三角波）との相似相関の検出

この本の第 4.1 章ウェーブレットの歴史の中で，現在のウェーブレットの理論は，1980 年初頭にモルレー（Morlet）による “wavelets of constant shape” を使った新しい周波数解析に始まると述べられている．モルレーはフランスの石油会社のエンジニアで 1975 年頃ガボール変換（ガウス関数を用いた短時間フーリエ解析）を用いて石油探査を行っていたが，ガボール変換では不十分であったので石油探査の目的に沿うように，ひとつの波を拡大縮小して短い波をあみだし，この波を使って石油探査を行ったと記されている．そして，モルレーは，この波を “wavelets of constant shape” と呼び，これがウェーブレットの誕生であるといわれている．これまでの短時間フーリエ変換では，窓の幅 $\sqrt{\alpha}$ は一定にして，波の振動数のみを変化させるものであったが，このモルレーの新しい波では，振動数と α を同時に変化させるもので，全く新しい発想であった．本項での “周期関数（サイン波，方形波，三角波）との相似相関の検出” を，“石油探査信号の相似相関の検出” に模擬して 1980 年代のモルレーになったつもりで，モルレーの気持ちを分析してみよう．ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換では，窓幅を指す指標の α を固定して振動数 ω を変化させるものであった．すなわち，ある固定窓の中で包絡関数に振幅を拘束されたサイン波の集まりに信号を分解するものであった．

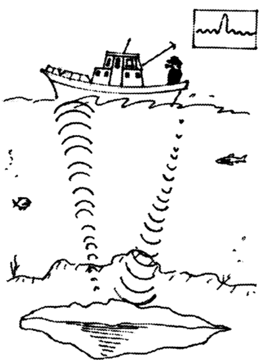


図 13.3　海中油田の探査

モルレーは弾性波を用いて石油探査を行っていたようであるが，ここでは，わかりやすいように図 13.3 に示したように海中油田の探査を例にとって考えよう．すなわち，運航中の船より超音波を発信して海底からの反射信号を時間 t を関数として得たものとする．超音波の反射信号の振幅は，海底の岩盤の波動インピーダンスに依存する．波動インピーダンスは，岩盤の軟硬に支配され，石油が地下に埋蔵されている場所では，この波動インピーダンスは弱くなり，超音波は岩盤中に透過する量が多くなるので，反射して観測船に戻る超音波の振幅は小さくなる．すなわち，観測船

で観測された信号にあるパターンの不連続が生じることになり，この不連続を感知したら，観測船のエンジンを止めて，不連続信号が発生した周辺をこまかく船を操船して，不連続信号の発生したインピーダンスの変化する境界を探査して，不連続パターンのより詳細な分析を行う．当時モルレーは，この観測値をガウス関数を用いて短時間フーリエ変換して不連続信号の検知を行っていたが，この手法では，不連続信号が発生しても，これを見落とすことがあることに気づいていた．すなわち，ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換は，窓幅を示す指標 α と振動数 ω を指定すると，この 2 つの指定値 α と ω に適合した不連続信号の周波数特性を極めて精緻に検出するが，若干この適合度がはずれると不連続信号の検知能力は急に悪化してしまうし，不連続信号の状態変化を観測船を運行しながら把握するのが難しいと思っていた．

この関係は，絞りとシャッタースピードを同時に変えることのできるカメラで被写体を撮影するのと似ている．すなわち，ある被写体に最適に整合した絞りとシャッタースピードを用いれば，芸術的な写真を撮ることはできようが，日の光が若干変化すると，被写体に最適に整合した絞りとシャッタースピードの組合せは最適のものではなくなる．シャッタースピードは，ある程度離散的であっても，絞りはアナログ的に変化できるので，両者の組合せは無限にあり，その中で最適なものはひとつしかない．この最適な組合せの両隣では，極端に性能が落ちたとすると，芸術的な写真をとることが目的ならば，時間に関係なく最適な組合せを追求することもできようが，旅行中の風景や状況が刻々変化する写真を撮るような場合には向いてない．そこで，ある被写体を撮るのに，芸術的なセンスでは最適ではないが，条件の若干の変化にもタフに対応できる適切な絞りとシャッタースピードの一組を用意して，大きな条件の変化には，この組合せを拡大または縮小して用いるとすれば，状況が刻々変化する状態を記録する写真をとるのに十分な機能を果たすことができる．これが，いわゆるオートフォーカスカメラの発想である．ところで，モルレーはこの発想で窓幅を示す指標 α と振動数 ω の組を，若干の条件の変化にもタフに不連続信号とそのパターンを検出するように選定して，大きな条件の変化にはこれを拡大縮小して，不連続信号の検出に応用すると共にデータの分離操作を容易にした，これがウェーブレットの誕生であることは前に述べた．

本項では，周期関数（サイン波，方形波，三角波）がガウス関数を用いた短時間フーリエ変換やウェーブレット変換の相似相関検出能力によって，検出される様子を示すと共に，前述した両者の利害得失を明らかとしたい．

まず，ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換によるサイン波（0.5 [Hz]）の様子を図 13.4 に示した．左から $\alpha = 0.1, 1.0, 5.0$ の場合の図を示してある．この図では

横軸に時間をとり，縦軸に周波数をとり，紙面と直角方向に変換値の大きさ（周波数分析結果）をとっており，周波数分析の結果は，図の下に表示してあるように濃淡で表している．すなわち，淡色になるほど，周波数分析の成分が大きいことを示している．$\alpha = 0.1$ の場合には 0.5 [Hz] のサイン波の存在すら明らかではない．$\alpha = 1.0$ の場合では 0.5 [Hz] を中心とする成分があることがわかるが，0.5 [Hz] を中心として約 1.0 [Hz] 弱に白い線が広がっており，0.5 [Hz] のサイン波を検出しているとは言えない．さらに $\alpha = 5.0$ の場合を見ると，0.5 [Hz] のサイン波は，かなりくっきり検出されだした．このように α の値を大きくとると窓の幅が大きくなり，解析する信号を長くとることができて，サイン波の検出精度は向上してくる．これは，ある人のそっくりさんを探すのに母集団が多ければ（窓の幅が大きければ），より良いそっくりさんを見つけ出すことができることに対応している．

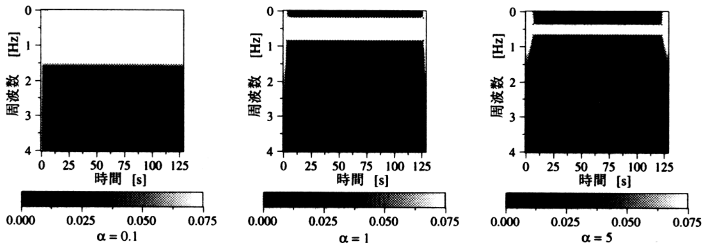


図 13.4　ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換によるサイン波（0.5 [Hz]）の検出

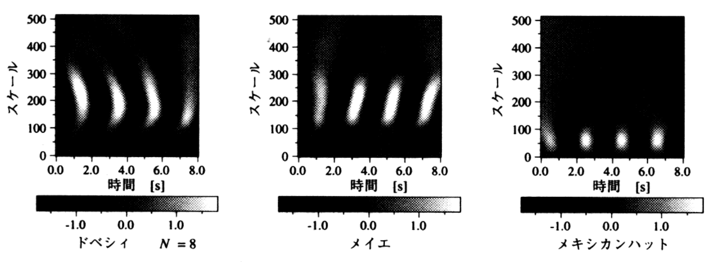


図 13.5　ウェーブレット変換によるサイン波（0.5 [Hz]）の検出

他方，同じ 0.5 [Hz] のサイン波をウェーブレット変換したのが図 13.5 である．ここでは，周波数の変化を連続的にとらえるためにウェーブレット展開でなく，ウェーブレット変換を行った．左から，ドビシィ，メイエ，メキシカンハットの順で示しており，図の表示は，図 13.4 と同じように横軸に時間をとり，縦軸にスケールファクタ a をとり，紙面と直角方向に濃淡でその成分の大きさを表している．いずれの場合にも，4 つの白く輝いたところが見られる．これは，サイン波のピークを表しているもので，サイン波の周波数が 0.5 [Hz] であるので，その周期は 2 秒であり，横軸の 8 秒の間にピークが 4 つあることが理解できる．13.1 相似相関検出の原理 で述べたように，ウェーブレット変換は，時間領域で信号と相関をとっていると述べたが，この図からこれがよく確認される．一方，周波数の分析は，横軸に沿って白く輝いたところを注目すると縦に幅を持っており，縦軸の a の値を明確に指定していない．

他方，図 13.4 のガウス関数を用いた短時間フーリエ変換の $\alpha = 5.0$ の場合には，かなり明瞭にサイン波の周波数 0.5 [Hz] を同定していると言えるし，α の値をもっと大きくとれば，白い幅はより細い幅で表され，最終的には，一本の白い線になり周波数は確実に同定されると想像される．すなわち，α の値を十分に大きくとって，窓の幅 $\sqrt{\alpha}$ を十分に大きくすると確実にサイン波を同定できるが，ウェーブレットでは窓の幅が制約されているので周波数の解像度には限度がある．

この現象を説明するために次の余弦波を考える．

$$x(t) = a\cos\omega_0 t \tag{13.9}$$

ここで振幅: a と円振動数: ω_0 は定数である．この関数のフーリエ変換とその逆変換は次式の対で与えられる．

$$\mathcal{X}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)e^{-i\omega t}\,dt \tag{13.10}$$

$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{X}(\omega)e^{i\omega t}\,dt \tag{13.11}$$

古典的には，これが成立する条件は

$$\int_{-\infty}^{\infty} |x(t)|\,dt \ < \infty \tag{13.12}$$

であり，余弦関数はこれを満足しないので，古典的にはフーリエ変換できないが，一般化関数であるデルタ関数を用いると，関数 $x(t) = a\cos\omega_0 t$ のフーリエ変換は，そ

れぞれ周波数 $-\omega_0$, $+\omega_0$ に存在する面積 πa の一対のデルタ関数として表されることが知られている．すなわち，

$$\mathcal{X}(\omega) = \pi a \left\{ \delta(\omega + \omega_0) + \delta(\omega - \omega_0) \right\} \tag{13.13}$$

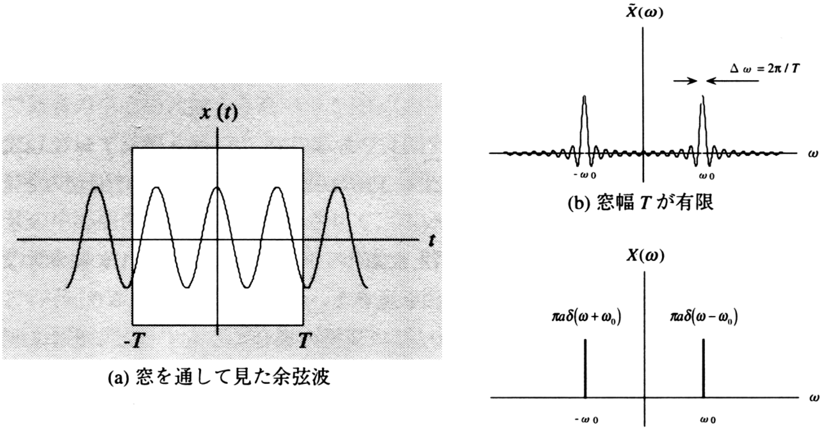
またこれを (13.11) に代入すると (13.9) が再生されることは容易にわかる．今，(13.9) の関数を幅 $2T$ なる窓を通して眺めたとする．窓からはみ出た部分は見えないので，これを 0 とすると，(13.10) の積分範囲は $-T$ から T までとなり，フーリエ変換値の近似値 $\tilde{\mathcal{X}}$ を与える．すなわち，

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{X}}(\omega) &= \int_{-T}^{T} a \cos \omega_0 t \, e^{-i\omega t} \, dt \\ &= 2 \int_{0}^{T} \frac{a}{2} \left\{ \cos(\omega - \omega_0)t + \cos(\omega + \omega_0)t \right\} dt \\ &= a \left\{ \frac{\sin(\omega - \omega_0)T}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin(\omega + \omega_0)T}{\omega + \omega_0} \right\} \end{aligned} \tag{13.14}$$

これを図示すると，図 13.6 のようになり，有限の窓を通して見た余弦波 $x(t) = a \cos \omega_0 t$ のフーリエ変換値 $\tilde{\mathcal{X}}(\omega)$ は図 13.6(b) に示すように周波数 $-\omega_0$ と $+\omega_0$ に中心をもつ小山をなして，その裾ではさざ波が生じている．窓幅 T の増大とともに，そのその小山の幅は狭く，高さは高くなり，究極では図 13.6 (c) に示した一対のデルタ関数となる．

このことを念頭に入れて図 13.4 を眺めると窓幅を拡げる方向で α を大きくすると 0.5 [Hz] のサイン波がより明確に同定されることが明瞭に理解される．一方，図 13.5 のウェーブレット変換ではサイン波のピークを表す点を中心にして，白色のダイコンが置いてあるように見える．また，白色のダイコン形の周辺はぼやけていて，それを過ぎると黒色のゴボウ形が表れ，この黒色のゴボウ形はサイン波の谷を表している．これらのダイコン形とゴボウ形の中心点がサイン波の周波数 0.5 [Hz] を示すのであるが，縦長のダイコンやゴボウの形から見られるようにウェーブレット解析では，周波数の同定は，ある幅を持ってしか与えられない．

ウェーブレット解析が周波数解像度の向上に限度をもつのは，ウェーブレットが時間領域で局在しているために，その本質的サポートの幅が信号に対して窓となるが，短時間フーリエ解析で行ったように，この窓幅は際限なく拡大できない．そのために，ウェーブレット変換では，解析する信号の長さが有限となり，図 13.6(b) のような状態となり，これを紙面の上の方から眺めて，そのピーク値を白い色で表し，山裾では



(a) 窓を通して見た余弦波

(b) 窓幅 T が有限

(c) 窓幅 T が無限

図 13.6 窓を通して見た余弦波 $a\cos\omega_0 t$ のフーリエ変換

淡い色にするとすれば，図 13.5 のように周波数が幅を持って表されることが理解される．以上を総合すると，短時間フーリエ変換は 時間–周波数解析（t–ω 解析）であり，一方，ウェーブレット解析は 時間–スケール解析（t–a 解析）である．時間–スケール解析（t–a 解析）は，周波数の分析は若干犠牲にして，時間と共に変化する状態を検出しようということで，**動態解析** ともいえる．

ウェーブレット解析は周波数の分析能力では，短時間フーリエ解析ほど良くないが，時間軸で生じている動態を同定するという点で，短時間フーリエ解析が持っていない機能を有する．すなわち，ダイコンやゴボウの例で述べたように白から黒の推移は信号の山から谷への推移をそのまま表すので，雑音の中に埋まっている動態をウェーブレット解析によって抽出し，それを目で見ることができる．動態解析 という言葉は，この本で初めて使った言葉である．ウェーブレットは誕生したばかりであるので，とりあえず，このように称しておくが，もっと良い名称が今後見つかるかもしれない．

ところで，図 13.4 の短時間フーリエ変換では，横軸の時間は 125 秒とっているのに対して，図 13.5 のウェーブレット変換では 8 秒しかとっていないことに注目願いたい．短時間フーリエ変換では，検出したい周波数（この場合は 0.5 [Hz]）が Δ を時間刻みとすると，ナイキスト円振動数 $\omega_0 = \pi/\Delta$ またはナイキスト振動数 $f_0 = \pi/2\Delta$ より，十分低めでないとエイリヤジングによる数値計算誤差が混入するといわれてい

る．短時間フーリエ変換では関数系は正弦波または余弦波であるので，ある周波数の関数系を特定するには，一周期（2π）の中点にサンプリング点が 1 点あれば十分であるので，この分析に使いうる最大円振動数 $\omega_0 = \pi/\Delta$ をナイキスト円振動数として指定できた．

この例では，検出したい振動数は 0.5 [Hz] であるので，$\Delta \ll \pi/2 \times f = 3.14/2 \times 0.5 = 3.14$ [s]，これより十分に小さい $\Delta = 128/1024 = 0.125$ [s] を時間刻みととって解析を行った．

一方，ウェーブレット解析では関数系となるウェーブレットは図 11.1 に示すように，その形は正弦波または余弦波のように単純でないので，関数系となるウェーブレットを時間軸上で特定するには，短時間フーリエ変換の場合よりもずっとこまかい時間刻みが必要である．本解析ではこれを $\Delta = 8/1024 = 0.0078$ [s] として，解析した．このことは数値計算上の重要な事項であるので注意願いたい．

同じように方形波（基本周波数 0.5 [Hz]）をガウス関数を用いた短時間フーリエ変換したのが図 13.7 である．左から $\alpha = 0.1$，$\alpha = 1.0$，$\alpha = 5.0$ と窓幅を拡げるにしたがって，方形波の保有する周波数成分である 1 次（0.5 [Hz]），2 次（1.5 [Hz]），3 次（2.5 [Hz]），4 次（3.5 [Hz]）の成分の検出精度が上がってくるのがわかり，この傾向はサイン波の場合と同様である．

この方形波のウェーブレット変換を図 13.8 に示した．ドベシィ，メイエの場合では，サイン波の変換図の時に表れた 1 次の白色のダイコンの下にダイコンの根のようなものが見られる．これは，方形波の 2,3,4 次の成分を表しているもので，高次の成分になるほど，根の先端部分を表していることになる．

次に，三角波をガウス関数を用いた短時間フーリエ変換で変換して，その結果を図 13.9 に示した．同じようにウェーブレット変換した図を図 13.10 に示した．これらの傾向は，サイン波，方形波で述べたのと同様である．

また，中心周波数が低い雑音（中心周波数 0.125 [Hz]）に覆われた雰囲気中に，$t = 40$ 秒でサイン波，方形波，三角波（各々の中心周波数 0.5 [Hz]）が付与された状態をガウス関数を用いた短時間フーリエ変換で変換した図を図 13.11，図 13.13，図 13.15 に示す．サイン波，方形波，三角波のいずれの場合も，$t = 40$ 秒で印荷した信号は検出されていない．一方，これらの状態をウェーブレット変換したのが図 13.12，図 13.14，図 13.16 であり，$t = 2$ 秒で印荷した信号を検出している．

ここで，短時間フーリエ変換では信号の印荷する時間を $t = 40$ 秒としたのは，前述したようにナイキスト周波数の関係で時間刻みを $\Delta = 0.125$ [s] として，全長 128 秒を解析したためである．他方，ウェーブレット変換では同じくナイキスト周波数の

関係で時間刻みを $\Delta = 0.0078$ [s] として解析したので全長 8 秒間を解析したので信号の印荷する時間を $t = 2$ 秒とした．

次に，中心周波数を 2 [Hz] にあげた雑音に覆われた雰囲気中に，同じように $t = 40$ 秒で雑音の中心周波数より高い 0.5 [Hz] の中心周波数をもつ，サイン波，方形波，三角波について，前と同じように 2 つの変換を比較しよう．まず，ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換した結果を図 13.17，図 13.19，図 13.21 に示す．前の例と雑音と信号の中心周波数の関係を逆転させて，高い周波数のノイズの中に信号を埋め込んだものであるが，この場合にはガウス関数を用いた短時間フーリエ変換によって $t = 40$ 秒で印荷したサイン波，方形波，三角波は検出されている．このようにガウス関数を用いた短時間フーリエ変換は，各状態に見合った最適の窓幅 $\sqrt{\alpha}$ と周波数を選択すると良好な同定ができるが，状態が異なると同定の精度が落ちて，場合によっては同定不能となる．一方，この状態のウェーブレット変換が図 13.18，図 13.20，図 13.22 であるが，$t = 2$ 秒の不連続波形を検出しており，信号の下に雑音の成分が現れている．このように，ウェーブレット変換は時間領域の不連続を検出する際に，周囲の状況の変化にタフであるといえる．

これらを通して眺めると 13.1 相似相関検出の原理 で“窓フーリエ変換は周波数領域の相似相関を検出し，ウェーブレット変換が時間領域の相似相関を検出する”と述べたが，これを計算例題によって実証できたといえよう．

また，この節のはじめに述べたように，短時間フーリエ変換が一眼レフの絞りとシャッタースピードを自由に選択できる芸術写真をねらえるカメラであると例示して，ウェーブレット変換をオートフォーカスカメラと例示して，状態の変化に順応して対応可能と述べたことも納得されよう．

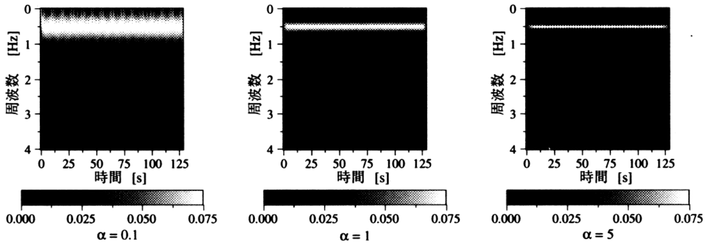


図 **13.7** ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換による方形波（基本周波数 0.5 [Hz]）の検出

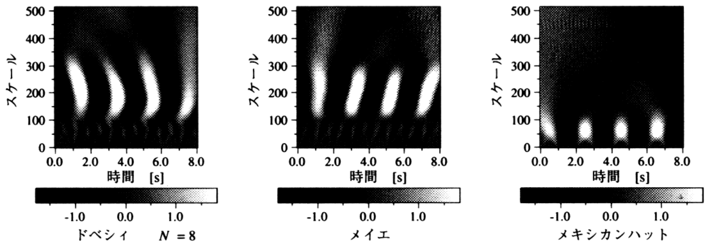


図 **13.8** ウェーブレット変換による方形波（基本周波数 0.5 [Hz]）の検出

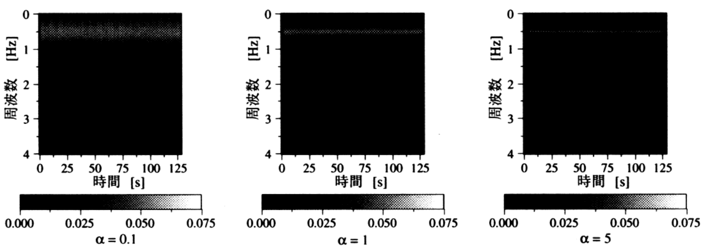


図 **13.9** ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換による三角波（基本周波数 0.5 [Hz]）の検出

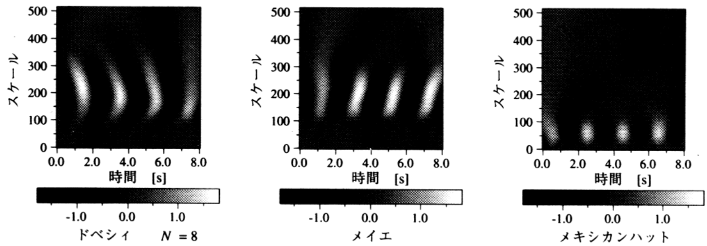


図 13.10　ウェーブレット変換による三角波（基本周波数 0.5 [Hz]）の検出

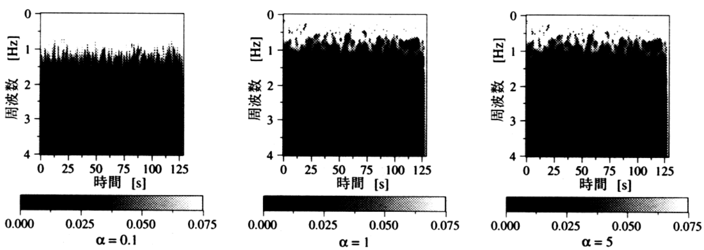


図 13.11　ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換による雑音（中心周波数 0.125 [Hz]）に覆われたサイン波（0.5 [Hz]）の検出（$S/N_0 = 1.5$）

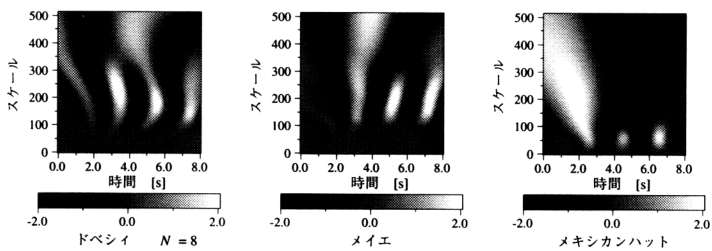


図 13.12　ウェーブレット変換による雑音（中心周波数 0.125 [Hz]）に覆われたサイン波（0.5 [Hz]）の検出（$S/N_0 = 1.5$）

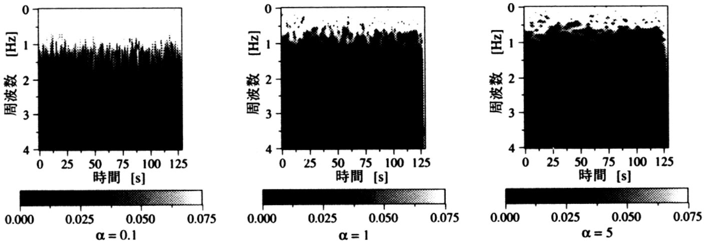


図 **13.13** ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換による雑音（中心周波数 0.125 [Hz]）に覆われた方形波（0.5 [Hz]）の検出（$S/N_0 = 1.5$）

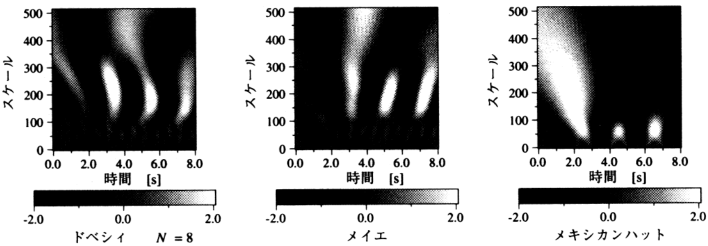


図 **13.14** ウェーブレット変換による雑音（中心周波数 0.125 [Hz]）に覆われた方形波（0.5 [Hz]）の検出（$S/N_0 = 1.5$）

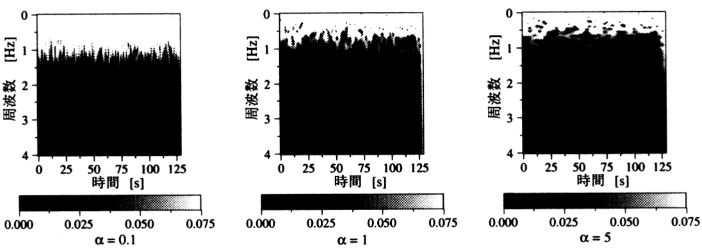


図 **13.15** ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換による雑音（中心周波数 0.125 [Hz]）に覆われた三角波（0.5 [Hz]）の検出（$S/N_0 = 1.5$）

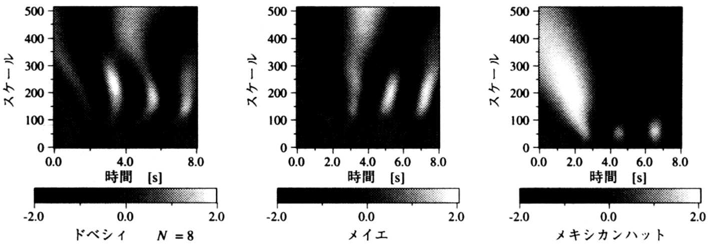


図 13.16 ウェーブレット変換による雑音（中心周波数 0.125 [Hz]）に覆われた三角波（0.5 [Hz]）の検出（$S/N_0 = 1.5$）

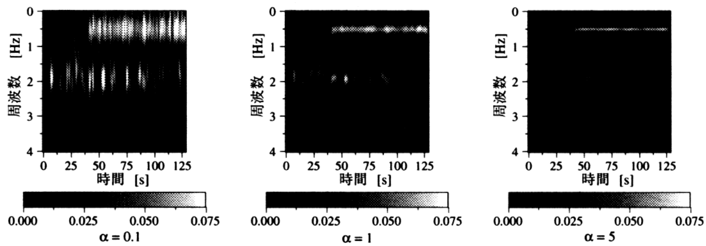


図 13.17 ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換による雑音（中心周波数 2 [Hz]）に覆われたサイン波（0.5 [Hz]）の検出（$S/N_0 = 1.5$）

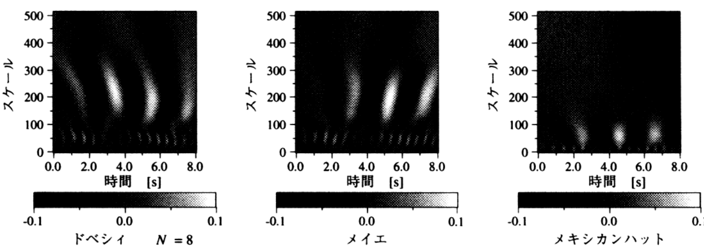


図 13.18 ウェーブレット変換による雑音（中心周波数 2 [Hz]）に覆われたサイン波（0.5 [Hz]）の検出（$S/N_0 = 1.5$）

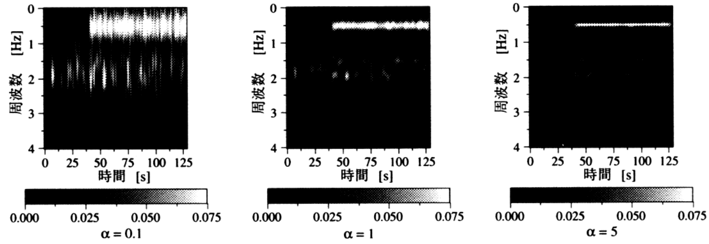


図 13.19　ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換による雑音（中心周波数 2 [Hz]）に覆われた方形波（0.5 [Hz]）の検出（$S/N_0 = 1.5$）

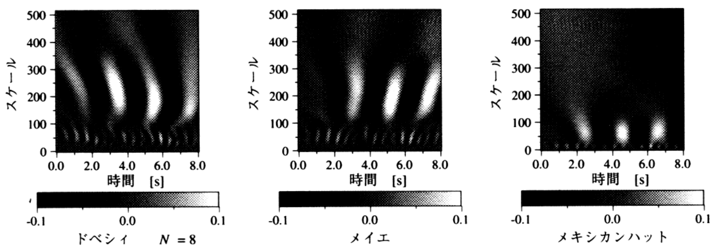


図 13.20　ウェーブレット変換による雑音（中心周波数 2 [Hz]）に覆われた方形波（0.5 [Hz]）の検出（$S/N_0 = 1.5$）

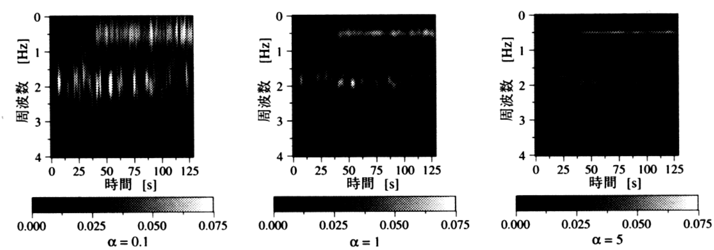


図 13.21　ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換による雑音（中心周波数 2 [Hz]）に覆われた三角波（0.5 [Hz]）の検出（$S/N_0 = 1.5$）

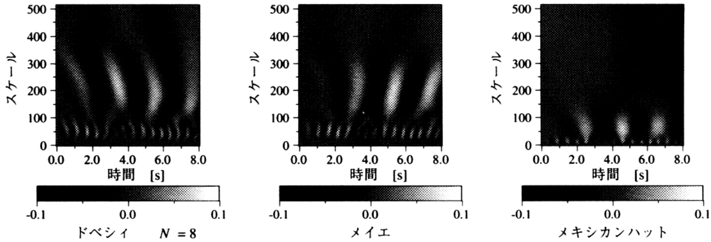
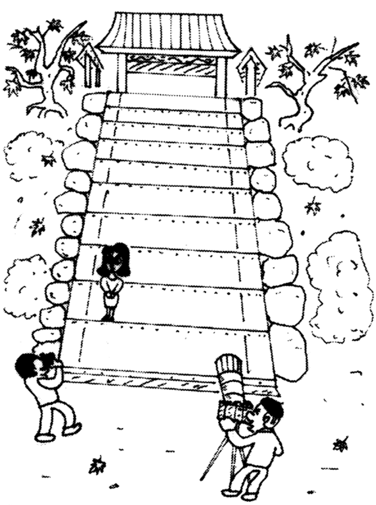


図 **13.22**　ウェーブレット変換による雑音（中心周波数 2 [Hz]）に覆われた三角波（0.5 [Hz]）の検出（$S/N_0 = 1.5$）



13.3　非周期関数（ログスイープ波，孤立した波）との相似相関の検出

13.2 で周期関数（サイン波，方形波，三角波）のガウス関数を用いた短時間フーリエ変換とウェーブレット変換を行って，両者の相似相関の検出能力を述べてきた．その結果，ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換は 時間–周波数解析（t–ω 解析）であり，周波数の分析能力にすぐれていて，例にたとえると一眼レフの絞りとシャッタースピードを自由に選択できるカメラであり，これを用いて芸術写真をも撮影できるとも述べた．

一方，ウエーブレット変換は，時間–スケール解析（t–a 解析）であり時間軸上の動態を分析するものとして，動態解析 と称してみた．また，カメラの例にたとえるとオートフォーカスのカメラであり記録写真などの撮影に有効であると述べた．

しかし，ここで冷静に考えてみると “短時間フーリエ変換とウエーブレット変換を同じ土俵の上で闘わしてきたのだろうか?･･･” という疑問が生じてくる．すなわち，周期関数（サイン波，方形波，三角波）の検出という土俵で両者を比較した結果，短時間フーリエ変換は一眼レフのカメラであり，ウェーブレット変換は，オートフォーカスのカメラであると例にたとえた．しかし，一眼レフのカメラはオートフォーカスのカメラより高級であり，この点，ウェーブレット変換を安物あつかいしたのではないだろうか?･･･ この本はウェーブレット解析の本であり，著者にはウェーブレット解析の有能な能力を引き出す責任がある．

周期関数を土俵にとると，フーリエ変換は関数を周期関数の和に分解するので，周期関数の同定はフーリエ変換の得意とするところである．一方，ウェーブレット解析は，石油探査の例で述べたように非周期信号の検出のために誕生したものである．したがって，ウェーブレット解析をオートフォーカスのカメラのように安物のイメージで例えるのは適切ではなくて，ある場合には，ハイテクの必需品としてこれを表現するためには，これに適した土俵を設定しなくてはならない．

そこで，本項では非周期関数の検出を土俵にとり，非周期関数として，ログスイープ波とドベシィの $N=5$ のウェーブレットの一波を孤立波として選んで，ウェーブレット変換でなければ得られないものを抽出することを試みよう．

まず，8 秒間で 1 [Hz] から 10 [Hz] に変化するサイン波（ログスイープ波）のガウス関数を用いた短時間フーリエ変換を図 13.23 に示した．ここで，注目したいのは，周期関数（サイン波，方形波，三角波）の検出のときには，窓幅を示す指数 α を大きくとり窓幅を大きくすると，その周期関数の持つ周波数は，窓幅の大きさに比例し

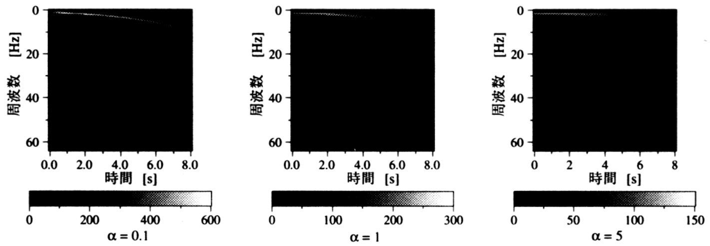


図 13.23　ログスイープ波のガウス関数を用いた短時間フーリエ変換

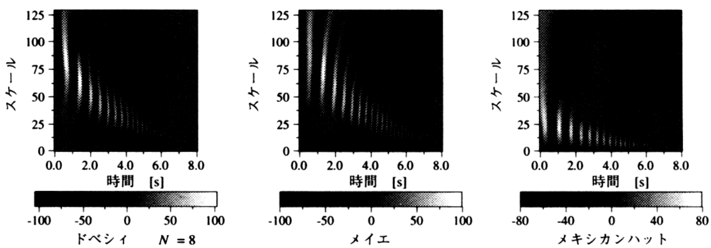


図 13.24　ログスイープ波のウェーブレット変換

て，よく同定された．一方，この図のように時間と共に変化する速い動きの同定には，周期関数の周波数の同定のときとは全く正反対に，$\alpha = 0.1$ のように窓幅は狭くなくてはならない．したがって，ガウス関数を用いた短時間フーリエ変換を用いてログスイープ波のように周波数が時間と共に変化する波を同定する場合に，周波数を明瞭に捕捉するためには α を大きくしたいし，周波数の変化を捕捉するためには α を小さくしたいし，両者，相矛盾したものが介在する．

また，同じ波形のウェーブレット変換図を図 13.24 に示した．短時間フーリエ変換では，周波数の変化のみを表しているのだが，ウェーブレット変換ではサイン波の山谷の繰返しが白黒の輝度によって表されている．これがウェーブレット変換を 動態解析 と呼びたい理由である．

またこの図より，低周波数では白い細長い線で表されていたものが，時間の経過と共に高周波になると，白い縦帯の幅が狭まり，周波数の同定能力が向上する様子が見られる．この動態が見られることがウェーブレット変換の特徴で，短時間フーリエ変

換にはなかった新しいハイテク機能である．

このように，時間と共にその状態が変化するログスイープ波等の検出にはウェーブレット変換が優れていて，短時間フーリエ変換では対抗できない機能をもつことを示した．ここで，もっともっとウェーブレット変換の効果を引き立てるために孤立波の相似相関の検出を行ってみよう．孤立波として図 13.25(a) に示したドベシィの $N = 5$ のウェーブレットを採用する．これが図 13.25 (b) のように中心周波数 15 [Hz] の雑音の中に埋め込まれたとして，この中から埋め込んだウェーブレットを抽出することを問題としよう．

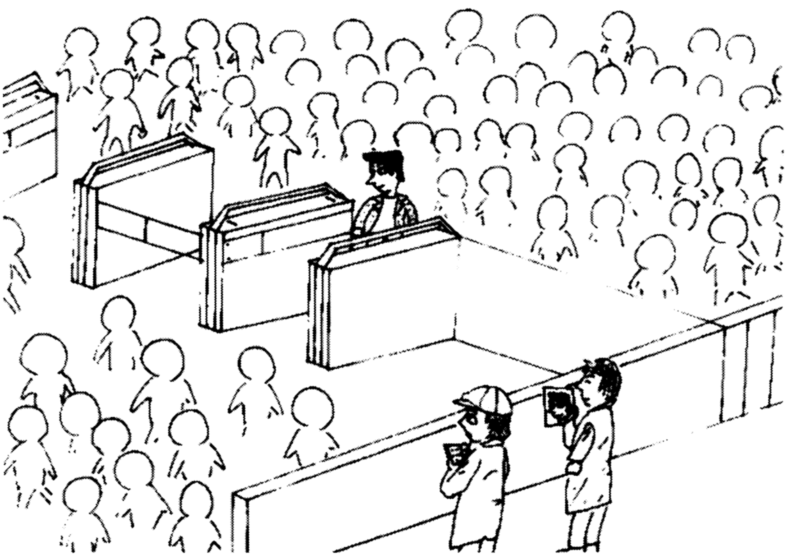
これを，ターミナル駅の改札口の朝の通勤時の雑踏の中から指名手配の重要事件の犯人を逮捕する問題と考えることにする．見たことのない犯人を見つけるには，背丈，体重，年齢，顔の特徴，髪，服装等々の犯人の特徴をメモにして張込みの刑事にこれを伝えなければならない．このようなメモによって犯人の特徴を正確に表すことができるが，朝の通勤時には，人の流れは，谷川の急流のごとく絶えることなく，しかも非常に速く流れる．したがって，雑踏の中からメモ帳に書かれた犯人の特徴と雑踏の人の流れのある人との相似相関をとり，相関値の強い人を選び出すことは非常に困難である．このような場合に，犯人の特徴を数字化してメモで与えるのではなく，その顔写真を使うことが効率的である．人間の頭脳は，どんなコンピュータも及ばない精緻な相似相関検出能力を持ち，雑踏の中から頭脳に刻まれた写真との相似相関の一瞬の照合によって犯人を選出できる．犯人の写真がなければ，モンタージュ写真を使うとして，この犯人のモンタージュ写真は，メモ帳のように，いくつかの特徴を分析したものではなくて，あるがままの姿を視覚に訴えるもので，ウェーブレットによる動態解析がこれに対応する．ここで，犯人の顔・形が図 13.25(a) の波形（ドベシィの $N = 5$ のウェーブレット）であったとする．そして，その犯人が雑踏の中にまぎれこんだ図が図 13.25(b) であり，これを目視しても犯人を見つけ出すことはできない．ここで，雑踏として中心周波数 15 [Hz] のフィルタにホワイトノイズを通して生成したもので，$S/N = 1.5$ とした．

さて，この雑踏の中から，犯人を検挙するために，2 人の刑事を配置した．2 人の刑事のうち，1 人が特徴を記入したメモ帳に相当するガウス関数を用いた短時間フーリエ変換（図 13.26）を持ち，もう 1 人がモンタージュ写真に相当するウェーブレット変換（図 13.27）を持って張込みを行った．図 13.27 に示したように，メモ帳に相当する短時間フーリエ変換を持った刑事は，谷川の急流のような通勤ラッシュの雑踏に追随できないので，犯人の形跡すらうかがうことができない．これは，前述したように短時間フーリエ変換が α が大きければ周波数の分解能が良くて，α が小さけれ

ば時間的な変化の分解能が良くなるという相異なる性能要求が，本例のように周波数と時間の両方の分解能を共に満足したい場合には，戸惑いが生じて全く役に立たなくなることを示唆している．

一方，図 13.27 に示したモンタージュ写真に相当するウェーブレット変換を持った刑事は全くそっくりとは言えないまでも，犯人の特徴の相似相関をつかんでおり，雑踏の中から犯人を割り出して，目ざとくこれを検挙することができた．

このようにウェーブレット解析は動態解析を行いうる唯一の手法で，短時間フーリエ変換にはない機能を持っている．この例題によって，ウェーブレット解析の持つ魅力を十分に抽出することができたと信じており，ウェーブレット解析の比類のない機能を紹介しなければならない著者の責務を果たし得たと思って安堵している．



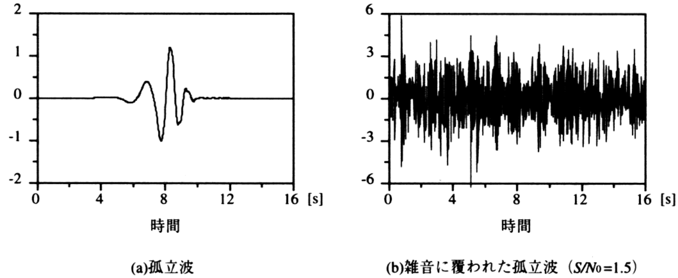


図 **13.25**　孤立波（ドベシィ $N = 5$）

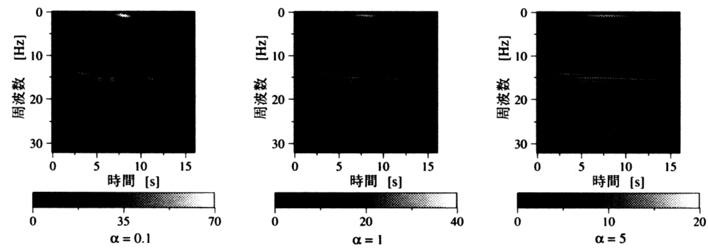


図 **13.26**　孤立波のガウス関数を用いた短時間フーリエ変換

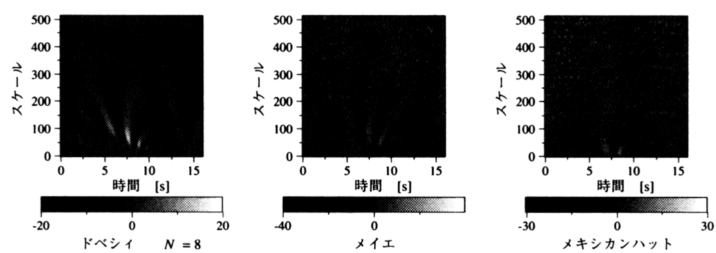


図 **13.27**　孤立波のウェーブレット変換

13.4　強震記録のウェーブレットパケット展開による構造物の固有周波数の変化の検出例

強い地震を受けると構造物は弾性域から塑性域にはいり，塑性域にはいる回数，度合い等によって累積損傷の量が定められる．しかし，強震記録の分析により，塑性域にはいる回数，度合いによって累積損傷を推定しようとするのは，12.4 に述べたように新しい試みであり，一般的に普及した手法ではない．そこで，ここではより一般的な構造物の固有振動の変化に注目しよう．構造物の固有振動数は，強い地震を受けて，構造部材が塑性域に突入して何回かの繰返しを受ける間にクラックの発生することもありうる．このような状況下では，構造物の保有する固有振動数は低いほうに低下する．したがって，固有振動数の低下を強震記録の分析によって把握することができれば，構造物の地震時の累積損傷を推定することができる．そこで，固有振動数の変化の検出の精度が重要な問題となる．

ウェーブレットパケット

ここでは，固有振動数の変化の時間領域の解像度をある程度確保しつつ，周波数領域における検出の精度を上げるためにウェーブレットパケット展開を用いた．ウェーブレットパケット展開は 数学的基礎編 10.2 ウェーブレットパケット で述べたように，ウェーブレット展開では V_j 空間のデータを「高周波領域 (W_{j-1})」と「低周波領域 (V_{j-1})」に 2 分割し，さらに，この「低周波領域 (V_{j-1})」を V_{j-2} と W_{j-2} に 2 分割する …，という操作を行っている．一方，ウェーブレットパケットでは,「高周波領域 (W_{j-1})」も同じように 2 分割しており，したがって通常のウェーブレット解析より細かい周波数の解析に向いている．この分割の樹形図が図 13.28 に示されているので，この図を見ると上に述べたことがよく理解できる．

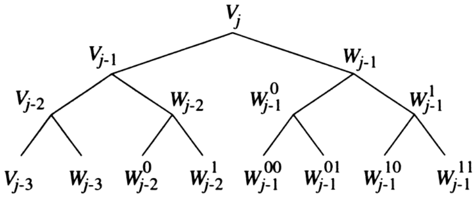


図 13.28　ウェーブレットパケット

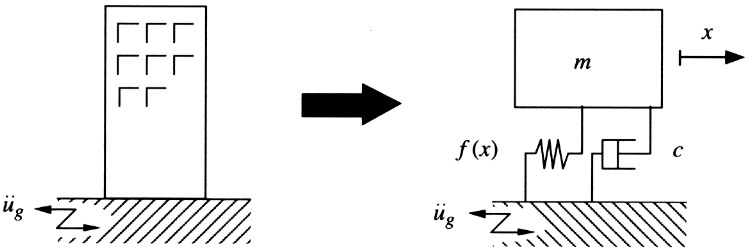


図 13.29　構造物のモデル化

数値解析

地震動 $\ddot{u}_g$ を受ける構造物を図 13.29 に示すように 1 質点 1 自由度系でモデル化した．m, c, $f(x)$ は，質量，減衰係数，復元力特性を表す．復元力特性 $f(x)$ は，強い地震時には，塑性域に入り，履歴特性を示す．この特性は，構造物の特性に応じて，種々の形式のものが提案されているが，ここでは，図 13.30 のような原点指向型のものを採用した．この型式では，最大変位点から逆方向に振動する際に原点をめがけて戻るので，最大変位と原点を結ぶ直線の勾配が各サイクル毎に小さくなるようになっている．この勾配は，その系のある時刻の歪みの大きさに応じたバネ係数を示すものである．したがって，この系では，最大変位の大きさの応じて固有振動数が低下するモデルとなっている．地震外乱としては，図 13.31 に示すような白色雑音を与え，その応答を図 13.32 に示す．この応答波形を分析し，この系の固有振動数の低下を時刻歴に検出するのがここでの主題である．ここでは数値計算であるから，時々刻々の最大変位 x がわかっているので，これより固有振動数を算出し，これを正解値とした．一方，応答値をウェーブレット解析し，横軸を時間，縦軸を振動数，紙面と直角方向の強さとして表すことができる．この紙面に直角の強さの成分を輝度で表すとすれば，2 次元の紙面に 3 次元の情報を表すことができる．他と比べて最も輝度の強い成分は，そこに固有振動数が存在することを示すので，その輝度の強い部分

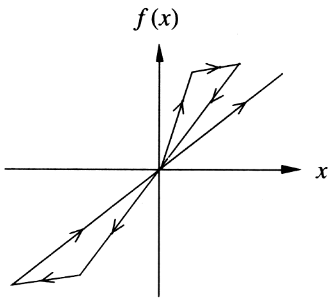


図 13.30　原点指向型復元力特性

に焦点を当てて，その時間経過を眺めたものが図 13.33 である．これより，応答波形のウェーブレットパケット展開は，構造物の地震時の累積損傷のもたらす固有振動数（実線）の低下をウェーブレットパケット展開（破線）によって検出するのに使えるといえる．

本項の執筆に当たっては次の論文を参考にした．
「構造物の強震記録のウェーブレットパケット変換を用いた構造物の累積損傷モーダルパラメーターの推定」京都工芸繊維大学平成 7 年度修士論文（須和英知）

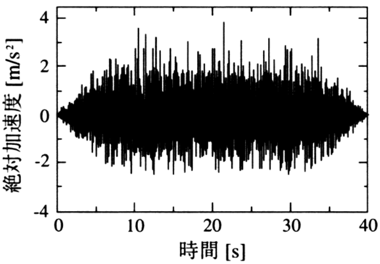


図 13.31 模擬地震外乱

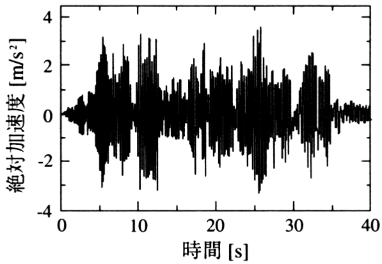


図 13.32 系の絶対加速度応答 $\ddot{z}$

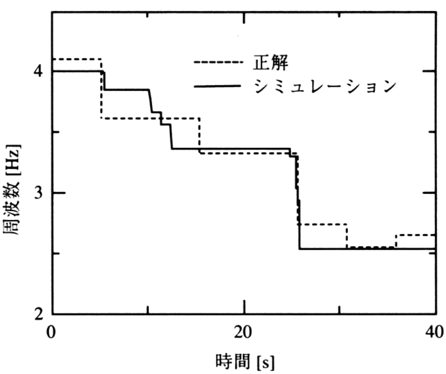


図 13.33 応答のウェーブレットパケットによる固有振動数の変化の検出

13.5　液晶（LCD）のカラーフィルタのマクロ欠陥検出

カラー液晶ディスプレイ（liquid crystal display: LCD）は，コンピュータの表示装置として急速に普及してきた．カラー液晶パネルの構造を図 13.34 に示す．液晶画面の光源は，バックライトより発する白色光である．液晶充填層の前面にカラーフィルタが配置されている．カラーフィルタには赤，青，緑なる 3 種類の画素が交互に配列されており，バックライトより発せられた白色光は，画素毎に赤，青，緑いずれかの色調に変換される．したがって，カラーフィルタの厚さが画面全体にわたって均一でないと，ある色調の明度が画面の位置に応じて異なることになる．たとえば，赤色を例にとると，カラーフィルタの厚さが標準より厚い部分では，光の透過率が低くなるため，同じ赤色でも，その明度は小さくなる．このように明度が画素によって変わり，明度の不均一が生ずることは望ましくない．そこで，このような明度の不均一を除去するためにカラーフィルタの厚さの不均一を定量的に検出する手法が求められた．

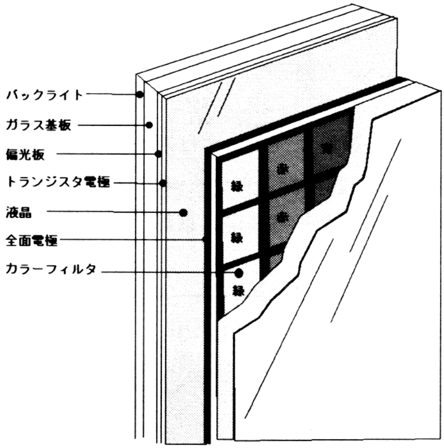


図 13.34　カラー液晶パネルの構造

カラーフィルタを製造する手法は色々あるが，そのひとつを例にあげれば，顔料中にガラス板を浸漬後，これを引き上げて乾燥させる手法がある．ガラス板を引き上げるときに，その引き上げ速度にムラがあると，カラーフィルタの膜厚に不均一を生ずる．この膜厚のムラを大別すると次の 3 種類に分けられる．

(a) 波状ムラ：局部的に波状の周期的な膜厚のムラ
(b) スジ状ムラ：波状のように周期的ではない線状のムラ
(c) 円形シミ：円形状の小領域のムラ

そこで波状ムラ，スジ状ムラに関して，画素の輝度をガボール変換して，その展開係数の大きさによってムラの程度を検出しようとした．ここでウェーブレット変換を

用いずにガボール変換を用いたのは，ガボール変換には包絡曲線があり，斜めの方向に展開しやすいためである．

一方，ガボール変換では，ガボール関数とムラの相関をとっていることになり，ガボール関数の方向と波長がムラの形状と近くなったときに展開係数値が大きくなるので，これによってムラの存在を検出することができる．

図 13.35 に 2 次元ガボール関数の実部と虚部を例示する．

図 13.36 に原画像を示した．このままだとわかりにくいので，これを信号になおして低周波数を遮断して図示すると図 13.37 のようになる．画像（a）では画面全体にわたって，ほぼ定常な縦の波状ムラが，画像（b）では部分的な横の波状ムラが，画像（c）では斜め方向の波状ムラが，画像（d）では四角形のシミが見られる．

それぞれの波状ムラ，シミの形に似たガボール関数を用いて，ガボール変換の展開係数の実部を示したものが図 13.38 である．

これまでの作業によって，欠陥が目視できる程度に強調することができたので，これによってカラーフィルタの製品検査に用いることができる．

本項の執筆に当たっては次の論文を参考にした．

「ガボール関数を用いたカラー液晶ディスプレイのマクロ欠陥検査支援」電子情報通信学会論文集，vol.J78-D-II No.0（1995–0）（中野，吉田，藤田）

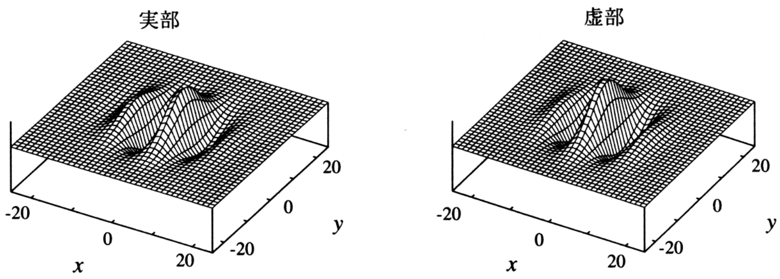


図 13.35　2 次元ガボール関数の実部と虚部

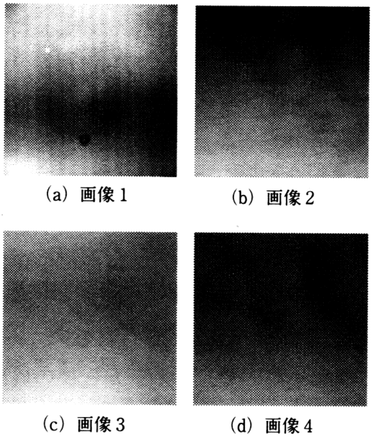


図 13.36　原画像

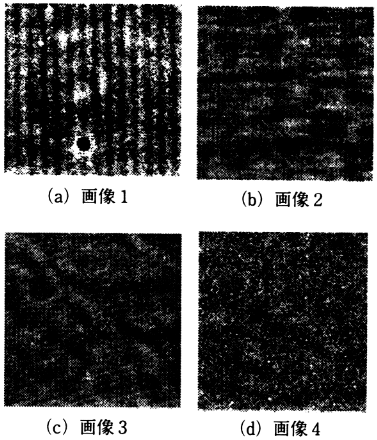


図 13.37　コントラスト強調画像

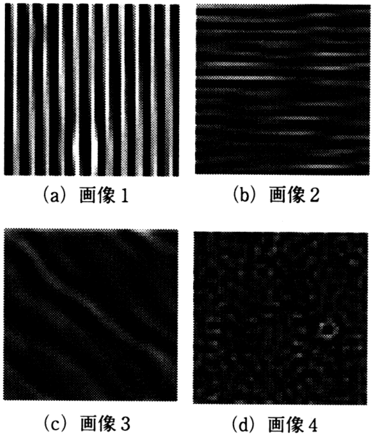


図 13.38　ガボール展開係数の実部

第 14 章

ウェーブレット展開係数によるデータ操作

14.1　データ操作の考え方

観測される信号は，一般に雑音に覆われているし，何種類かの信号の合成である場合が多い．したがって，観測された信号の中から所望の信号を取り出すことが望まれる．このとき，この観測された信号をウェーブレット展開し，その展開項のあるものだけを抽出すれば，所望の信号を得ることができる．また，逆の観点から言えば，展開項を除去して不要な信号を抜き去ることができる．これらは，ウェーブレット展開を用いて適切なフィルタを形成することができるとも言える．これらを総じて，ここでは「データ操作」と呼ぶことにする．



14.2　データ操作の例

コンボリューションとディコンボリューション

線形系に任意の入力 f が加わったときの系の出力 $x(t)$ はコンボリューション積分によって求められる．すなわち，

$$x(t) = \int_0^t h(t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{14.1}$$

ここで，$h(\cdot)$: ユニットインパルスレスポンス である．これを $\Delta\tau = \tau/n$ として離散化してマトリックス表示すると

$$\begin{bmatrix} x(\tau_0) \\ x(\tau_1) \\ \vdots \\ x(\tau_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\tau_0,0) & 0 & \dots & 0 \\ h(\tau_0,\Delta t) & h(\tau_1,0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ h(\tau_0,n\Delta t) & h(\tau_1,(n-1)\Delta t) & \dots & h(\tau_n,0) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f(\tau_0) \\ f(\tau_1) \\ \vdots \\ f(\tau_n) \end{bmatrix} \tag{14.2}$$

(14.2) の逆変換をとることにより，次のように出力 $x(t)$ より入力 f を得ることができる．

$$\begin{bmatrix} f(\tau_0) \\ f(\tau_1) \\ \vdots \\ f(\tau_n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h(\tau_0,0) & 0 & \dots & 0 \\ h(\tau_0,\Delta t) & h(\tau_1,0) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \dots \\ h(\tau_0,n\Delta t) & h(\tau_1,(n-1)\Delta t) & \dots & h(\tau_n,0) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x(\tau_0) \\ x(\tau_1) \\ \vdots \\ x(\tau_n) \end{bmatrix} \tag{14.3}$$

履歴復元力特性と等価線形化モデル

質量 m，復元力が $f(x)$ で表される非線形系に強制外力 $P_0 \cos\omega t$ が作用したときの運動方程式は次式で表される．

$$m\ddot{x} + f(x) = P_0 \cos\omega t \tag{14.4}$$

これを，1 サイクルにわたって同じ振動状態を呈するような，等価な線形系で表すと，

$$m\ddot{x} + c_{eq}\dot{x} + k_{eq}x = P_0 \cos\omega t \tag{14.5}$$

ここで，c_{eq}, k_{eq}: 等価な減衰係数とばね係数である．
$f(x)$ を図 14.1 に示したようなバイリニヤ型復元力としたとき，(14.4) と (14.5) が 1 サイクルに当たって平均的に等しい挙動を示すように等価減衰係数 c_{eq}，ばね係数 k_{eq} を求めた．

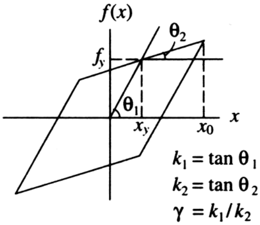


図 14.1　バイリニヤ型復元力モデル

インパルス応答のディコンボリューション

図 14.2 に示すような 1 質点系に入力 $\ddot{u}(t)$ を外力として作用したときの出力 $x(t)$ から入力 $u(t)$ を推定する問題を考える．この系の諸元を初期角振動数 $\omega = 2\pi$ [rad/s]，減衰比 $\zeta = 0.01$，として履歴復元力の降伏変位 15 [cm]，塑性比 $\gamma = (k_2/k_1) = 0.5$ として，$t = 0.5$ [s] で，12000 [cm/s^2] のインパルスを加えたとする．そのときのインパルス応答を図 14.3 に示す．このインパルス応答をドベシィ（$N = 10$）によるウェーブレットに展開したときの $j = 0$ の展開係数を図 14.4 に示す．

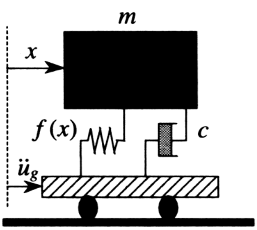


図 14.2　解析モデル

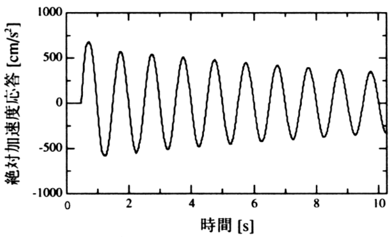


図 14.3　$t = 0.5$ [s] で 12G のインパルスを加えたときのインパルス応答

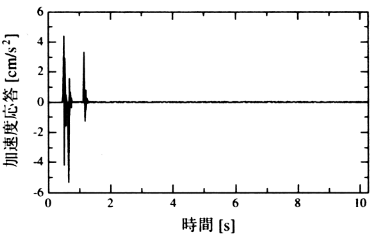


図 14.4　インパルス応答のドベシィ（$N = 10$）によるウェーブレット展開係数

明らかに 3 つのパルスが観測され，第 1 のパルスは，入力が $t = 0.5$ で急激に作用したときの異常信号であり，第 2，第 3 のパルスは応答変位が弾性域から塑性域に突入した際に生ずる速度の急変から生ずるものである．そこで，(14.5) で述べた等価減衰係数とばね係数を各サイクル毎に求めて，その結果を (14.3) に適用して，ディコンボリューションを行い入力を推定したものが図 14.5 である．

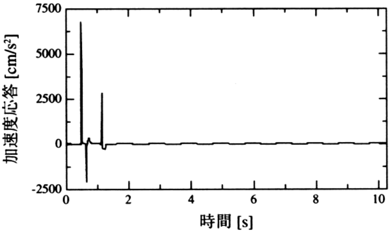
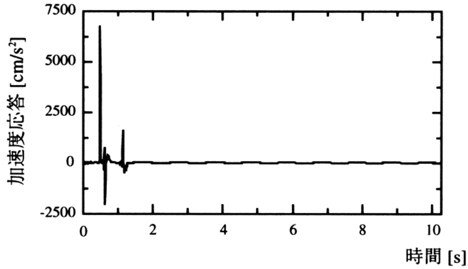


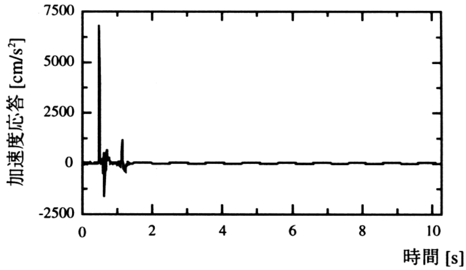
図 14.5　等価線形化手法を用いた入力波のディコンボリューション

この図を見ると第 2，第 3 のパルスは，入力時には存在しなかったものであるが，応答変位が非線形に突入した際に発生したパルスが，そのままディコンボリューションされたものである．本来，第 2，第 3 のパルスは，ディコンボリューションによって入力波形を知るときには不要なものであるので，これを除去することが必要である．そこで，出力波形のウェーブレット展開係数のうち第 2，第 3 のパルスに対応する係数を削除して，その後，出力波形を再構成した後に，これをディコンボリューションして図 14.6 に示す．(a) では $\alpha_{j=0,k}$ を削除した場合であり，かなり第 2，第 3 のピークが小さくなり改善しているのが見られる．(b) では $\alpha_{j=0,k}$，$\alpha_{j=-1,k}$ を削除したもので (a) より更に改善している．(c) では $\alpha_{j=0,k}$，$\alpha_{j=-1,k}$，$\alpha_{j=-2,k}$ を削除したものであり，ほぼ満足のいく点まで，データ操作によって改善することができる．

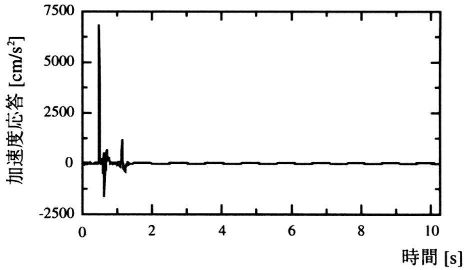
本項の執筆に当たっては次の論文を参考にした．
「バイリニヤー復元力を有する構造物の強震記録のディコンボリューションによる入力地震動の推定」京都工芸繊維大学平成 7 年度卒業論文（朝日孝輔）



(a)　$\alpha_{j=0,k}$ を削除



(b)　$\alpha_{j=0,k}$, $\alpha_{j=-1,k}$ を削除



(c)　$\alpha_{j=0,k}$, $\alpha_{j=-1,k}$, $\alpha_{j=-2,k}$ を削除

図 14.6　出力のウェーブレット展開係数 $\alpha_{j,k}$ のあるものを削除して再構成後ディコンボリューションしたもの

付録 A

MATLAB プログラムの例とその説明

工学的応用編では MATLAB と Wavelet Toolbox を使って解析している．代表的なサイン波について短時間フーリエ変換とウェーブレット変換を行ったプログラムを付録として示した．

A.1　サイン波のガウス関数を用いた短時間フーリエ変換のプログラム

```
% Script M-file: The Gabor transform of a sine wave.
%
   mtdat = 1024;                  % データ数を設定
   mtime = 128;                   % データ時間長さを設定
   dt = mtime/mtdat;              % サンプリング時間を設定
%
   t = 0:dt:mtime-dt;             % 0 から (mtime-dt) までをサンプリング時間
                                  % で分割した時間の設定
   freq = 0.5;                    % 正弦波の周波数を設定
   omega = 2*pi*freq;
   y = sin(omega*t);              % 入力する正弦波を設定
%
   alpha = input('alpha = '); % αの値を設定
   stime = 0.5;                   % 窓関数の 1 回あたりの移動時間の設定
%
   for shift = 0:stime:mtime  % ガウス関数の移動量を設定
      t = [0:dt:mtime-dt];
      gauss = exp(-(t-shift).^2/(4*alpha)) / (2*sqrt(pi*alpha));
      g = gauss';                 % ガウス関数を設定
      x = g.*y;                   % 入力データとの畳み込みを計算
%
      Gi = fft(x);                % g を高速フーリエ変換した値 Gi
      AGi = abs(Gi);              % Gi の絶対値を計算し AGi とする
      AG = [AG;AGi] ;             % AG に AGi の行を加える
   end;
%
   AGT = AG';                     % AG を転置
   ans = AGT(1:mtdat/2,:);        % 時間–周波数の行列を計算
   save ans.dat ans /ascii
%
```

A.2　サイン波のウェーブレット変換のプログラム

```
% Script M-file: The Wavelet transform of a sine wave.
% Needs the function cwt which belongs to the Wavelet Toolbox.
%
   clear;
%
   mtdat = 1024;                 % データ数を設定
   mtime = 8;                    % データ時間長さを設定
   dt = mtime/mtdat;             % サンプリング時間を設定
%
   t = 0:dt:mtime-dt;            % 0 から (mtime-dt) までをサンプリング時間
                                 % で分割した時間の設定
   freq = 0.5;                   % 正弦波の周波数を設定
   omega = 2*pi*freq;
   y = sin(omega*t);             % 入力する正弦波を設定
%
   a = input('a = ');            % スケールの最大値を設定
   c = cwt(y,a:-4:1,'db8',plot);    % 入力データをドベシィ (N = 8) で
                                    % 連続ウェーブレット変換する
   colormap(gray);
%
   save ans.dat c /ascii;
%
```

参考文献

[1] 芦野 隆一・Rémi Vaillancourt，『はやわかり MATLAB』，共立出版，(近刊)

[2] 斎藤 兆古，『Mathematica によるウェーブレット変換』，朝倉書店，1996

[3] 榊原 進，『ウェーヴレットビギナーズガイド』，東京電機大学出版局，1995

[4] 桜井他訳　チューイ，『ウェーブレット入門』，東京電機大学出版局，1993

[5] 袋谷 賢吉訳　ヤング，『ウェーブレット　信号処理とシステム推定への応用』，トッパン，1997

[6] 溝畑 茂，『偏微分方程式論』，岩波書店，1965

[7] 溝畑 茂，『ルベーグ積分』，岩波書店，1966

[8] 山口 昌哉・山田 道夫監訳　ベネッデット他編，『ウェーブレット　理論と応用』，シュプリンガー・フェアラーク東京，1995

[9] WIDE Project 編，*bit* 別冊　インターネット参加の手引き 1996 年度版，共立出版，1996

[10] Applebaum, *Probability and Information An intergrated approach*, Cambridge University Press, 1996

[11] Beals, *Advanced Mathematical Analysis*, GTM12, Springer-Verlag, 1973

[12] Cohen and Ryan, *Wavelets and Multiscale Signal Processing*, Chapman & Hall, 1995

[13] Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, 1992

[14] Daubechies (ed.), *Different Perspectives on Wavelets*, Proc. Sympos. Appl. Math., Vol. 47, AMS, 1993

[15] David, *Wavelets and Singular Integrals on Curves and Surfaes*, Lecture Notes Math. 1465, Springer-Verlag, 1991

[16] Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, 2nd ed., Princeton, 1995

[17] Gasquet and Witomski, *Analyse de Fourier et Applications: Filtrage, Calcul numérique, Ondelettes*, Masson, 1990

[18] Holschneider, *Wavelets: An Analysis Tool*, Oxford, 1995

[19] Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, Vol.1, Springer-Verlag, 1983

[20] Hubbard, *The World According to Wavelets*, A K Peters, 1996

[21] Kahane and Lemarié-Rieusset, *Fourier Series and Wavelets*, Gordon and Breach Publisers, 1995

[22] Meyer, *Wavelets and Operators*, Cambridge University Press, 1992

[23] Meyer, *Wavelets: Algorithms and Applications*, SIAM, 1993

[24] Newland, *An Intorduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis*, 3rd ed., Addison Wesley Longman, 1993

[25] Papoulis, *Signal Analysis*, McGraw-Hill, 1977

[26] Strang and Nguyen, *Wavelets and Filter Banks*, Wellesley-Cambridge Press, 1996

[27] Vaidyanathan, *Multirate Systems and Filter Banks*, Prentice-Hall, 1992

[28] Walter, *Wavelets and Other Orthogonal Systems with Applications*, CRC-Press, 1994

[29] Wickerhauser, *Adapted Wavelet Analysis from Theory to Software*, A K Peters, 1994

[30] Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis*, McGraw-Hill, 1965, (Reprint from Dover, 1987)

索　引

δ-サンプリング

δ-sampling　37

2π を法として合同である

congruent to $[-\pi, \pi]$ modulo 2π　77

r-regular　58

z 変換

z transform　71

2 進区間

dyadic interval　111

2 進区間分割

dyadic interval decomposition　111

2 進分割

binary partition　136

2 進有理数

dyadic rational number　100

■ あ　行

アップサンプリング

upsampling　72

アナライジングウェーブレット

analyzing wavelet　35

安定

stable　69, 71

位相

phase　73

一般化されたシャノンの標本定理

generalized Shannon's sampling theorem　38

因果的

causal　69, 71

インパルス応答

impulse response　70, 71

ウェーブレット

wavelet　45

ウェーブレット解析

wavelet analysis　134

ウェーブレット関数

wavelet function　45

ウェーブレット逆変換

inverse wavelet transform　36

ウェーブレット係数

wavelet coefficient　36, 135

ウェーブレット展開

wavelet expansion　45, 107

ウェーブレットパケット基底ライブラリ

wavelet packet bases library　113

ウェーブレット変換

wavelet transform　36, 135

ウェーブレット方程式
wavelet equation　78
エネルギー集中性
energy concentration　73
エネルギースペクトル
energy spectrum　73
エネルギーノルム
energy norm　167
エネルギー有限
energy finite　88
エントロピー
entropy　115, 116, 117
応答
response　69

■ か　行

カージナルサイン
cardinal sine　39
階段関数
step function　44
ガウス関数
Gaussian function　134
核
kernel　60
カスケード
cascade　69
カスケードアルゴリズム
cascade algorithm　80
ガボール
Gabor　24
ガボール関数
Gabor function　125, 135
ガボール変換
Gabor transform　135
カラー液晶ディスプレイ
Liquid crystal display　194
基本ウェーブレットパケット
basic wavelet packet　111
共役クワドラチュアフィルタ
conjugate quadrature filters 72
局所化
localization　32
クワドラチュア公式
quadrature rule　81
クロネッカーのデルタ
Kronecker delta　39
コアフレット
coiflet　99
高速ウェーブレット変換アルゴリズム
fast wavelet transform algorithm 84
コンパクト
compact　33

■ さ　行

最小位相
minimum-phase　73
最適基底アルゴリズム
best basis algorithm　119
作用素
operator　54
作用素ノルム
operator norm　54
三角多項式
trigonometric polynomial　85

サンプリング間隔
sampling width　37
サンプリングポイント
sampling point　37
時間周波数解析
time-frequency analysis　107
時間周波数原子
time-frequency atom　107
時間周波数の窓
time-frequency window　34
時間不変
time-invariant　69
指数的減少度
exponential decay　67
システム
system　69
実現可能フィルタ
realizable filter　72
シフト作用素
shift operator　70
シムレット
symlet　98
射影作用素
projection operator　54
シャノンの条件
Shannon's condition　38
周波数応答
frequency response　73
周波数伝達関数
frequency transfer function　70
出力
output　69
シュワルツの不等式
Schwarz's inequality　167
情報量
information content　114
伸張方程式
dilation equation　78
振幅
amplitude　73
推移行列
transition matrix　80
スケーリング関数
scaling function　51
スケール
scale　51
スペクトル因子分解
spectral factorization　89
正規直交基底
orthonormal basis　39
正規直交系
orthonormal system　39
正則
regular　58
精度
accuracy　98
積分核
integral kernel　60
積分作用素
integral operator　60
線形
linear　69
相似相関の検出
detection of similarity for correlation　124

増大列
increasing sequence 51
相平面
phase plane 34
ソボレフ空間
Sobolev space 52
ソボレフの埋込み定理
Sobolev embedding theorem 53

■ た 行

台
support 33
ダウンサンプリング
downsampling 72
多重解像度解析
multiresolution analysis 51
ダブルシフト直交性
double-shift orthogonality 79
単位インパルス
unit impulse 70
短時間フーリエ解析
short-time Fourier analysis 134
短時間フーリエ変換
short-time Fourier transform 33, 124, 135
中心
center 34
稠密な集合
dense set 54
超局所化
microlocalization 33
直交射影
orthogonal projection 54
直交補空間
orthogonal complement 47
直交和
orthogonal sum 45
ディラックインパルス
Dirac impulse 70
データ操作
data handling 124, 198
デジタルフィルタ
digital filter 70
伝達関数
transfer function 70, 71
動態解析
dynamical mode analysis 177
トーラス
torus 41
特性関数
characteristic function 44
ドベシィ
Daubechies 25, 125, 132
ドベシィのウェーブレット
Daubechies' wavelet 94

■ な 行

入力
input 69

■ は 行

パーシバルの等式
Parseval equality 32
ハイパスフィルタ

highpass filter　72
バニシングモーメント
vanishing moment　64
幅
width　34
バンドリミテッド
band-limited　38
非負（数列が）
non-negative　116
ヒルベルト空間
Hilbert space　39
フィルタ
filter　69
フィルタバンク
filter bank　69
フーリエ解析の不確定性原理
uncertainty principle in Fourier analysis　34
不連続信号の検出
detection of discontinuity in signal　124
分割レベル
decomposition level　111
ヘルスモニタリング
health monitoring　146
ヘルダー連続
Hölder continuous　98
ヘルダー連続性
Hölder continuity　132
ポワソンの和公式
Poisson summation formula 39

■ ま　行

窓関数
window function　32
窓フーリエ変換
windowed Fourier transform 32, 124
マラー
Mallat　23
無限インパルス応答
infinite impulse response　71
無限遠で急減少
rapidly decreasing at infinity 52, 54
メイエ
Meyer　23, 125
メイエのウェーブレット
Meyer's wavelet　50
メイエのスケーリング関数
Meyer's scaling function　42
メキシカンハット
Mexican hat　125
モーメント
moment　64
モルレー
Morlet　24, 172

■ や　行

有界作用素
bounded operator　54
有限インパルス応答
finite impulse response　71
弱い意味で最小位相

minimum phase in weak sense 88

■ ら 行

ラプラス変換
Laplace transform 70
リース基底
Riesz basis 52
リースの補題
Riesz lemma 89
リーマン・ルベーグの定理
Riemann-Lebesgue theorem 31
離散フィルタ
discrete filter 69
理想的ローパスフィルタ
ideal lowpass filter 91
レベル L のウェーブレットパケット基底ライブラリ
wavelet packet bases library of level L 113
レベル L の最適基底
best basis of level L 118
連続フィルタ
continuous filter 69
ローパスフィルタ
lowpass filter 72
ローラン多項式
Laurent polynomial 89

著者略歴

芦野 隆一 （あしの・りゅういち）

1957年　生まれ
1981年　京都大学理学部 数学科 卒業
1989年　大阪市立大学 大学院理学研究科 博士課程 退学
1989～92年　京都大学 数理解析研究所 研修員
1992～95年　産業技術短期大学 講師
1995～97年　同 助教授
1996～97年　オタワ大学 客員教授
現在　大阪教育大学 教育学部 数理科学講座 助教授・理学博士

山本 鎮男 （やまもと・しずお）

1935年　生まれ
1958年　早稲田大学 第一理工学部 建築学科 卒業
1958～87年　千代田化工建設㈱ 応用解析技術部長，技師長等を歴任
1982～87年　早稲田大学 理工学部 非常勤講師
現在　京都工芸繊維大学 工芸学部 機械システム工学科教授（1987年より）・工学博士

ウェーブレット解析
——誕生・発展・応用

1997年6月5日　初版1刷発行

著　者　芦野 隆一　山本 鎮男

発行者　南條 光章
発　行　共立出版株式会社
東京都文京区小日向4-6-19
電話東京(03)3947局2511番（代表）
〒112／振替口座　00110-2-57035番

印　刷　啓文堂
製　本　中條製本

社団法人
自然科学書協会
会員

検印廃止
NDC 501.1
ISBN4-320-01537-1

Printed in Japan